

【態度目標】しゃべる、質問する、説明する、動く、協力する、貢献する

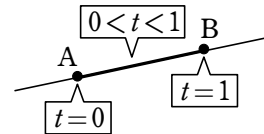
【内容目標】位置ベクトルを用いて、直線、円などの図形をベクトルで表すことができる。

□平面上の点の存在範囲

前ページで学んだように、点 $P(\vec{p})$ が異なる2点 $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$ を通る直線 AB 上にあるための必要十分条件は、 s, t を実数として

$$\vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b}, s + t = 1 \quad \dots\dots ①$$

係数を足したら1になるのがポイント



が成り立つことである。すなわち、点 $P(\vec{p})$ が ① を満たしながら動くとき、

点 $P(\vec{p})$ の存在範囲は直線 AB である。ここで、 $s \geq 0, t \geq 0$ と

すると、 $0 \leq t \leq 1$ となるから、次のことがいえる。

異なる2点 $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$ に対して、点 $P(\vec{p})$ が

$$\vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b}, s + t = 1, s \geq 0, t \geq 0$$

係数を足したら1になるけれども
係数は両方とも0以上のとき

を満たしながら動くとき、点 $P(\vec{p})$ の存在範囲は、線分 AB である。

応用例題5) $\triangle OAB$ に対して、点 P が

$$\vec{OP} = s\vec{OA} + t\vec{OB}, s + t = 2, s \geq 0, t \geq 0$$

係数を足したら1にならない

を満たしながら動くとき、点 P の存在範囲を求めよ。

【解答】 $s + t = 2$ から $\frac{s}{2} + \frac{t}{2} = 1$

2で割って、(係数)を足したら1になるように調整する

$$\text{また } \vec{OP} = s\vec{OA} + t\vec{OB} = \frac{s}{2}(2\vec{OA}) + \frac{t}{2}(2\vec{OB})$$

$\frac{s}{2}$ と $\frac{t}{2}$ が係数になるように変形する

$$\text{ここで, } \frac{s}{2} + \frac{t}{2} = 1, \frac{s}{2} \geq 0, \frac{t}{2} \geq 0 \text{ なので}$$

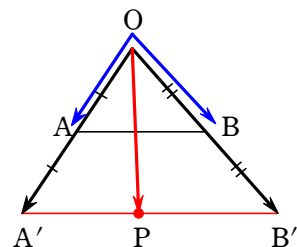
$$\text{ここで, } \frac{s}{2} = s', \frac{t}{2} = t' \text{ とおくと}$$

$$\vec{OP} = s'(2\vec{OA}) + t'(2\vec{OB}), s' + t' = 1, s' \geq 0, t' \geq 0$$

よって、

$2\vec{OA} = \vec{OA'}$, $2\vec{OB} = \vec{OB'}$ を満たす点 A' , B' をとると、
点 P の存在範囲は線分 $A'B'$ である。

この一文が答え(図示しなさいと言われたら右のような図が答え)



一般に、 $s + t = k$ のとき

$$\frac{s}{k} + \frac{t}{k} = 1 \text{ であるから}$$

$$\vec{OP} = s'(k\vec{OA}) + t'(k\vec{OB}) \quad s' + t' = 1 \text{ となる}$$



$\triangle OAB$ に対して、点 P が

$$\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}, \quad 0 \leq s+t \leq 1, \quad s \geq 0, \quad t \geq 0$$

を満たしながら動くとき、点 P の存在範囲を求めてみよう。

$s+t=k$ ($0 \leq k \leq 1$) とおく。

[1] $0 < k \leq 1$ のとき $\frac{s}{k} + \frac{t}{k} = 1$

また $\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$

$$= \frac{s}{k}(k\overrightarrow{OA}) + \frac{t}{k}(k\overrightarrow{OB})$$

ここで、 $\frac{s}{k} = s', \quad \frac{t}{k} = t'$ とおくと

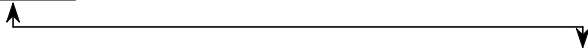
$$\overrightarrow{OP} = s'(k\overrightarrow{OA}) + t'(k\overrightarrow{OB}), \quad s' + t' = 1, \quad s' \geq 0, \quad t' \geq 0$$

よって、 $k\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA'}, \quad k\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB'}$ を満たす点 A', B' をとると、

定数 k に対して、点 P の存在範囲は辺 AB に平行な線分 $A'B'$ である。

k の値が $0 < k \leq 1$ の範囲で変化すると、線分 $A'B'$ 上の点は、

点 O を除く $\triangle OAB$ の周およびその内部を動く。



[2] $k=0$ のとき、 $s=0, t=0$ であるから、点 P は点 O に一致する。

したがって、点 P の存在範囲は、 $\triangle OAB$ の周および内部 である。

問 1 2) $\triangle OAB$ に対して、点 P が

$$\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}, \quad 0 \leq s+t \leq 2, \quad s \geq 0, \quad t \geq 0$$

を満たしながら動くとき、点 P の存在範囲を求めよ。

解答 $0 \leq s+t \leq 2$ から $0 \leq \frac{s}{2} + \frac{t}{2} \leq 1$ kで割って、(係数)を足したら1になるように調整する

また $\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} = \frac{s}{2}(2\overrightarrow{OA}) + \frac{t}{2}(2\overrightarrow{OB})$

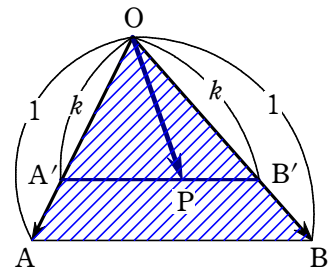
ここで、 $\frac{s}{2} = s', \quad \frac{t}{2} = t'$ とおくと $\frac{s}{2}$ と $\frac{t}{2}$ が係数になるように変形する

$$\overrightarrow{OP} = s'(2\overrightarrow{OA}) + t'(2\overrightarrow{OB}),$$

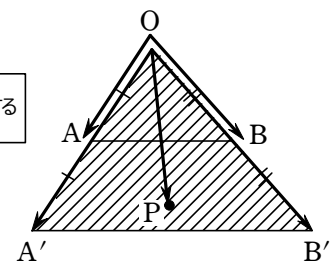
$$0 \leq s' + t' \leq 1, \quad s' \geq 0, \quad t' \geq 0$$

よって、 $2\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA'}, \quad 2\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB'}$ を満たす点 A', B' を

とると、点 P の存在範囲は $\triangle OA'B'$ の周および内部である。



存在範囲②



研究 点の存在範囲の図示

$\triangle OAB$ と点 P があり, $\overrightarrow{OP}$ が

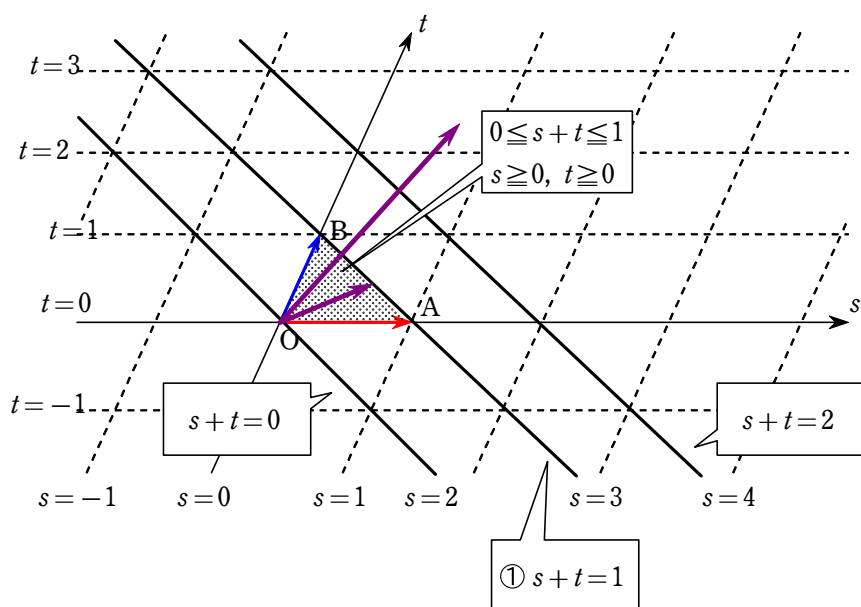
$$\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} \quad \text{ただし } s, t \text{ は実数}$$

と表されているとする。いま, 下の図のように直線 OA に平行な直線, 直線 OB に平行な直線を, それぞれ等間隔に引く。そして, s, t が条件

$$s + t = 1$$

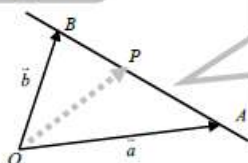
を満たしながら動くときの P の存在範囲をこの図にかき込むと, 図の直線 ① になる。

平面上の1次独立なベクトルの組は, 平面上のベクトル全体の「基底」をなすと呼ばれる
ここでは $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ で定められる st 座標系 (斜交座標) を考える



補足

$s+t=1 \Rightarrow$ 直線 AB



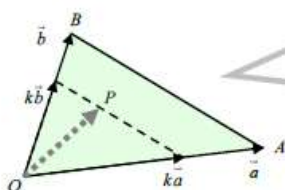
特に $s+t=1$ について

$s \geq 0, t \geq 0$ のとき $\Rightarrow$ 線分 AB

$s \leq 0, t \geq 1$ のとき $\Rightarrow$ 線分 AB の B を越えた半直線

$s \geq 1, t \leq 0$ のとき $\Rightarrow$ 線分 BA の A を越えた半直線

$s+t \leq 1, s \geq 0, t \geq 0 \Rightarrow \triangle OAB$ の周および内部



特に

$s+t > 1$ のとき

$\Rightarrow$ 直線 AB に関して O の反対側の領域

$s+t < 1$ のとき

$\Rightarrow$ 直線 AB に関して O の同じ側の領域

制限なし $\Rightarrow$ 3点 O, A, B の定める平面全体

制限つき

$s < 0, t > 0$ のとき

$s > 0, t > 0$ のとき

$s < 0, t < 0$ のとき

$s > 0, t < 0$ のとき

$0 \leq s \leq 1, 0 \leq t \leq 1 \Rightarrow$ 平行四辺形 OACB の周および内部

