

【態度目標】しゃべる、質問する、説明する、動く、協力する、貢献する

【内容目標】位置ベクトルを用いて、直線、円などの図形をベクトルで表すことができる。

□円のベクトル方程式

点 $C(\vec{c})$ を中心とする半径 r の円を K とする。

点 $P(\vec{p})$ が円 K 上にあることは、 $|\vec{CP}| = r$ が成り立つことと同値であるから、円 K は次の式で表される。

$$|\vec{p} - \vec{c}| = r \quad \cdots \cdots ①$$

これを円 K のベクトル方程式という。

この式の両辺を2乗すると

$$|\vec{p} - \vec{c}|^2 = r^2$$

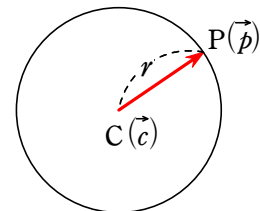
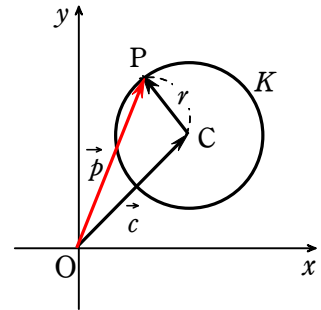
よって、① は次のように書くこともできる。

$$(\vec{p} - \vec{c}) \cdot (\vec{p} - \vec{c}) = r^2$$

ベクトルを成分で表して、 $\vec{p} = (x, y)$, $\vec{c} = (a, b)$ とすると、② から

次の円の方程式が導かれる。

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$



$$\boxed{\vec{p} \text{ の係数は } 1 \text{ に}} \quad |\vec{p} - \vec{c}| = r$$

↑ ↑
中心の位置ベクトル 半径

2点 $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$ を結ぶ線分 AB を直径とする円を K とする。

点 $P(\vec{p})$ を A , B 以外の円 K 上の任意

の点とすると、 $\angle APB = 90^\circ$ であるから

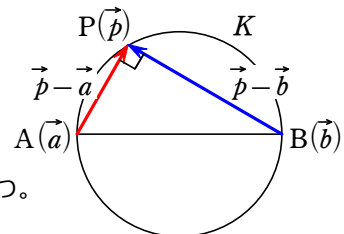
$$\vec{AP} \cdot \vec{BP} = 0$$

が成り立つ。この式は、 P が A または B に一致するときにも成り立つ。

したがって、円 K のベクトル方程式は、次のようになる。

$$(\vec{p} - \vec{a}) \cdot (\vec{p} - \vec{b}) = 0 \quad \cdots \cdots ②$$

よって①、② は円のベクトル方程式である。



弧 AB が半円のとき、
円周角は 90°

垂直が出てきたら
垂直条件を

点 $C(\vec{c})$ を中心とする半径 r の円のベクトル方程式

$$|\vec{p} - \vec{c}| = r$$

2点 $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$ を直径とする円のベクトル方程式

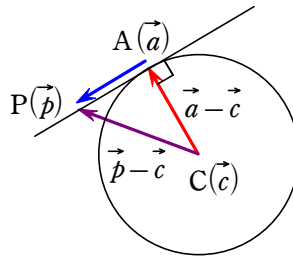
$$(\vec{p} - \vec{a}) \cdot (\vec{p} - \vec{b}) = 0$$

練習34) 点 $C(\vec{c})$ を中心とする半径 r の円上の点

を $A(\vec{a})$ とする。点 A におけるこの円の
接線のベクトル方程式は、その接線上の
任意の点を $P(\vec{p})$ として

$$(\vec{p}-\vec{c})\cdot(\vec{a}-\vec{c})=r^2$$

で与えられることを示せ。



【解答】 $P(\vec{p})$ を接線上の A 以外の任意の点とすると、接線 AP は A において半径 CA に垂直であるから

$$\overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{CA}$$

よって $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{CA} = 0$

P が A に一致するときは $\overrightarrow{AP} = \vec{0}$ であるから、このときも $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{CA} = 0$ が成り立つ。

$$\overrightarrow{AP} = \vec{p} - \vec{a}, \quad \overrightarrow{CA} = \vec{a} - \vec{c} \quad \text{であるから} \quad (\vec{p} - \vec{a}) \cdot (\vec{a} - \vec{c}) = 0$$

$$\text{よって} \quad \{(\vec{p} - \vec{c}) - (\vec{a} - \vec{c})\} \cdot (\vec{a} - \vec{c}) = 0$$

$$\text{ゆえに} \quad (\vec{p} - \vec{c}) \cdot (\vec{a} - \vec{c}) = |\vec{a} - \vec{c}|^2$$

したがって、接線のベクトル方程式は

$$(\vec{p} - \vec{c}) \cdot (\vec{a} - \vec{c}) = r^2$$

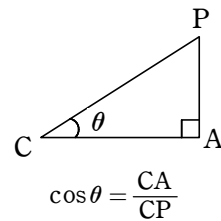
【別解】 $P(\vec{p})$ を接線上の任意の点とし、 $\angle ACP = \theta$ とすると

$$\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{CA} = |\overrightarrow{CP}| |\overrightarrow{CA}| \cos \theta$$

半径 CA は接線に垂直であるから、 $|\overrightarrow{CP}| \cos \theta = |\overrightarrow{CA}|$ が成り立つ。

$$\text{よって} \quad \overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{CA} = |\overrightarrow{CA}|^2$$

$$\text{したがって、接線のベクトル方程式は} \quad (\vec{p} - \vec{c}) \cdot (\vec{a} - \vec{c}) = r^2$$



垂直が出てきたら
垂直条件を

Oに統一して
位置ベクトルへ

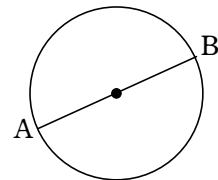
【深める】 2点 $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$ を結ぶ線分 AB を直径とする円を K として、次のことを示してみよう。

(1) 円 K のベクトル方程式は、円 K 上の任意の点を $P(\vec{p})$ として

$$\left| \vec{p} - \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2} \right| = \frac{|\vec{a} - \vec{b}|}{2} \quad \dots\dots ①$$

で与えられる。

(2) ①を変形すると、 $(\vec{p} - \vec{a}) \cdot (\vec{p} - \vec{b}) = 0$ となる。



【解答】

(1) 中心の位置ベクトルは $\frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$

$$\text{半径は} \quad \frac{|\overrightarrow{AB}|}{2} = \frac{|\vec{b} - \vec{a}|}{2} = \frac{|\vec{a} - \vec{b}|}{2}$$

よって

$$\left| \vec{p} - \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2} \right| = \frac{|\vec{a} - \vec{b}|}{2} \quad \dots\dots ①$$

$$(2) \text{ ①から} \quad \left| \vec{p} - \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2} \right|^2 = \frac{|\vec{a} - \vec{b}|^2}{2^2}$$

よって

$$|\vec{p}|^2 - \vec{p} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) + \frac{|\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2}{4} = \frac{|\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2}{4}$$

$$\text{すなわち} \quad |\vec{p}|^2 - \vec{p} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\text{したがって} \quad (\vec{p} - \vec{a}) \cdot (\vec{p} - \vec{b}) = 0$$