

【態度目標】しゃべる、質問する、説明する、動く、協力する、貢献する

【内容目標】空間における座標の考え方について理解できる。

○空間の座標

平面上の点の座標は2つの実数の組であったが、空間の点の座標は3つの実数の組である。そのことを見ていこう。

□空間の点の座標

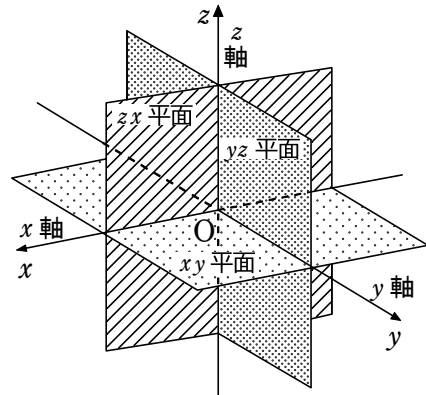
空間に点 O をとる。点 O を共通の原点とし、 O で互いに直交する3本の数直線を右の図のように定める。これらの数直線を、それぞれ x 軸、 y 軸、 z 軸 といい、まとめて **座標軸** という。また、

x 軸と y 軸が定める平面を **xy 平面**

y 軸と z 軸が定める平面を **yz 平面**

z 軸と x 軸が定める平面を **zx 平面**

という。これらの3つの平面を、まとめて **座標平面** という。



空間の点 P を通る3つの平面を、それぞれ x 軸、 y 軸、 z 軸に垂直に作る。それらの平面と x 軸、 y 軸、 z 軸との交点を、それぞれ A 、 B 、 C とし、3点 A 、 B 、 C の x 軸、 y 軸、 z 軸に関する座標を、それぞれ a 、 b 、 c とすると、

空間の点 P の位置は、これら3つの

実数の組 (a, b, c) で表される。

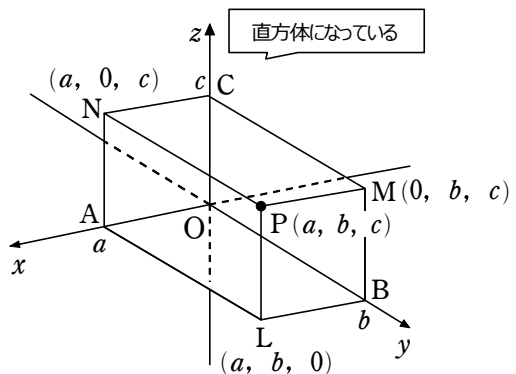
この組 (a, b, c) を点 P の **座標** といい、

a 、 b 、 c をそれぞれ点 P の **x 座標**、

y 座標、 **z 座標** という。

座標が (a, b, c) である点 P を、

$P(a, b, c)$ と書く。



このように座標の定められた空間を **座標空間** と呼び、点 O を座標空間の **原点** という。原点 O の座標は $(0, 0, 0)$ である。

xy 平面上の点の座標 $\cdots (○, △, 0)$

zx 平面上の点の座標 $\cdots (○, 0, □)$

yz 平面上の点の座標 $\cdots (0, △, □)$

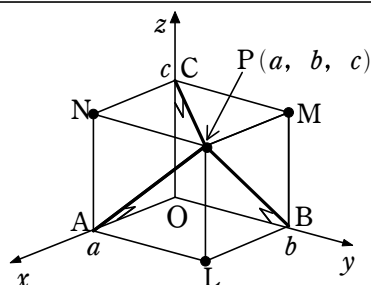
無い文字の座標を0に変えてみよう

また、右の図のような直方体OALB-CNPMにおいて、
3点A, B, Cの座標は、それぞれ

$$(a, 0, 0), (0, b, 0), (0, 0, c)$$

である。直線PAは x 軸と直交する平面上にあるから、
 x 軸と直交し、点Pから x 軸に下ろした垂線になる。

同様に、直線PB, PCは、それぞれ点Pから
 y 軸, z 軸に下ろした垂線になる。



問1) 点P(a, b, c)から xy 平面, yz 平面, zx 平面に下ろした垂線を、それぞれPL, PM, PNとすると、3点L, M, Nの座標を求めよ。

解答 3点L, M, Nの座標は、順に $(a, b, 0), (0, b, c), (a, 0, c)$

問2) 点P(2, 4, 3)に対して、次の点の座標を求めよ。

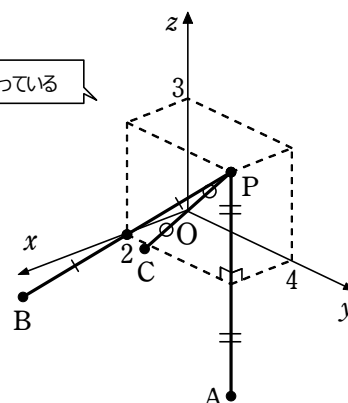
(1) xy 平面に関して対称な点A

(2) x 軸に関して対称な点B

(3) 原点に関して対称な点C

無い文字の座標の符号を変えてみよう

直方体になっている



解答

(1) (2, 4, -3) $\leftarrow xy$ 平面 $\rightarrow z$ 座標

(2) (2, -4, -3) $\leftarrow x$ 軸 $\rightarrow y$ 座標, z 座標

(3) (-2, -4, -3) $\leftarrow$ 原点 $\rightarrow x$ 座標, y 座標, z 座標



P(a, b, c)と x 軸に関して対称な点の座標 $\cdots (a, -b, -c)$

P(a, b, c)と y 軸に関して対称な点の座標 $\cdots (-a, b, -c)$

P(a, b, c)と z 軸に関して対称な点の座標 $\cdots (-a, -b, c)$

P(a, b, c)と原点に関して対称な点の座標 $\cdots (-a, -b, -c)$

無い文字の座標の
符号を変えてみよう

□ 2点間の距離

$AC=a$, $AE=b$, $AF=c$ である直方体 $ACDE-FGBH$ の対角線 AB の長さを求めてみよう。

$\triangle ACD$ と $\triangle ADB$ が直角三角形であるから、三平方の定理により

$$\begin{aligned} AB^2 &= AD^2 + DB^2 \\ &= (AC^2 + CD^2) + DB^2 \\ &= a^2 + b^2 + c^2 \end{aligned}$$

$AB > 0$ であるから

$$AB = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

① を用いて、座標空間における 2 点

$A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ 間の距離を求めてみよう。

点 A を通り各座標平面に平行な 3 つの平面と、
点 B を通り各座標平面に平行な 3 つの平面で、
直方体 $ACDE-FGBH$ ができる場合を考える。

ただし、 AC , AE , AF がそれぞれ x 軸, y 軸, z 軸に平行とする。

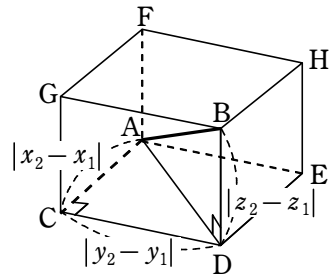
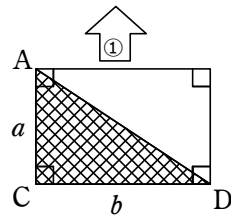
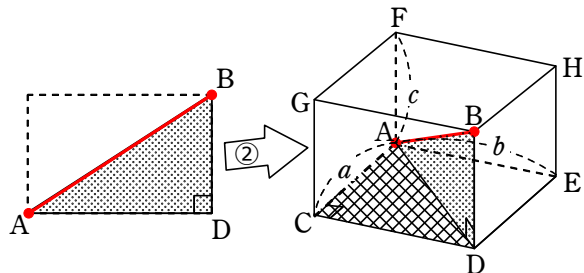
このとき、直方体の 3 辺 AC , CD , DB の長さは

$$AC = |x_2 - x_1|, \quad CD = |y_2 - y_1|, \quad DB = |z_2 - z_1|$$

であるから、対角線 AB の長さは、① から

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

一般に、次のことがいえる。



2点間の距離

2 点 $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ 間の距離は

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

特に、原点 O と点 A の距離は $OA = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$

原点との距離は、各座標の 2 乗の和にルートをつける
(z 座標の分増やせば $O K$)

例 1) 3 点 $O(0, 0, 0)$, $A(1, -2, 2)$, $B(-1, 1, 3)$ について

$$OA = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}$$

$$= \sqrt{9} = 3$$

$$AB = \sqrt{(-1-1)^2 + \{1-(-2)\}^2 + (3-2)^2}$$

$$= \sqrt{14}$$

終

例題 1) 3点 $O(0, 0, 0)$, $A(1, 2, 1)$, $B(-1, 0, 1)$ から等距離にある

yz 平面上の点 P の座標を求めよ。

解答 P は yz 平面上にあるから、その座標を $(0, y, z)$ とおく。

$$OP = AP \text{ から } y^2 + z^2 = (-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2$$

$$\text{すなわち } 2y + z = 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$OP = BP \text{ から } y^2 + z^2 = 1^2 + y^2 + (z-1)^2$$

$$\text{すなわち } z = 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ を解いて } y = 1, z = 1$$

したがって、点 P の座標は

$$(0, 1, 1)$$

