

【態度目標】しゃべる、質問する、説明する、動く、協力する、貢献する

【内容目標】平面のときと同様に空間におけるベクトルの内積について理解し、計算することができる。

□ベクトルの内積

空間の $\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ のなす角 θ を平面の場合と同様に定義し、 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ も平面の場合と同じ式

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$$

で定義する。また、 $\vec{a} = \vec{0}$ または $\vec{b} = \vec{0}$ のときは、 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積を $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ と定める。

問 5) 1 辺の長さが 2 の立方体 ABCD-EFGH について、

次の内積を求めよ。

- (1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$ (2) $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{AH}$

【解答】

- (1) $AB=2$, $AH=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$, $\angle BAH=90^\circ$ であるから

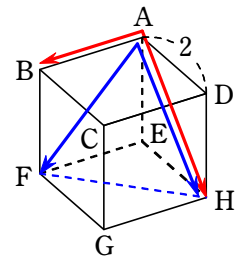
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AH}| \cos 90^\circ = 2 \times 2\sqrt{2} \times 0 = 0$$

- (2) (1) より $AH=2\sqrt{2}$

同様に $AF=2\sqrt{2}$, $FH=2\sqrt{2}$

よって、 $AF=FH=AH$ であるから、 $\triangle AFH$ は正三角形である。ゆえに

$$\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{AH} = |\overrightarrow{AF}| |\overrightarrow{AH}| \cos 60^\circ = 2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} \times \frac{1}{2} = 4$$



また、平面の場合と同様に、空間においても、次の性質などを導くことができる。

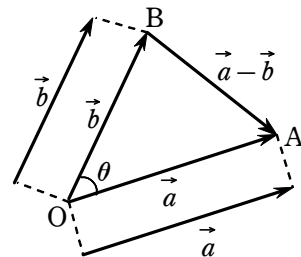
内積の性質

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= \vec{b} \cdot \vec{a}, & \vec{a} \cdot \vec{a} &= |\vec{a}|^2, & |\vec{a}| &= \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} \\ (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} &= \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}, & \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) &= \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} \\ (k\vec{a}) \cdot \vec{b} &= \vec{a} \cdot (k\vec{b}) = k(\vec{a} \cdot \vec{b}) & \text{ただし } k & \text{は実数} \end{aligned}$$

ベクトルのなす角

$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ のなす角を θ とすると

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \quad \text{ただし } 0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$$



基本的には
平面のときと
同じ話です

平面の場合と同様に、余弦定理を用いると、次のことが示される。

内積と成分

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \vec{b} = (b_1, b_2, b_3) \text{ のとき}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

空間の2つのベクトルのなす角を求めてみよう。

例5) $\vec{a} = (1, 2, 1), \vec{b} = (-2, 2, 4)$ のなす角 θ を求める。

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \times (-2) + 2 \times 2 + 1 \times 4 = 6$$

まず内積を求める

$$|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{6}$$

内積が0で無いなら

$$|\vec{b}| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

大きさを求める

基本的には
平面のときと
同じ話です

$$\text{よって } \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{6}{\sqrt{6} \times 2\sqrt{6}} = \frac{1}{2}$$

コサインの式に代入する

$$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ \text{ であるから } \theta = 60^\circ$$

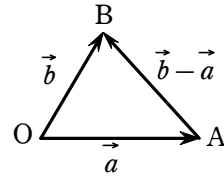
終

深める 空間のベクトルについても、平面ベクトルのように、

右の図において等式 $|\vec{b} - \vec{a}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2(\vec{a} \cdot \vec{b})$ が
成り立つ。このことから、上の等式

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

が成り立つことを示してみよう。



解答

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \vec{b} = (b_1, b_2, b_3) \text{ とおくと}$$

$$\vec{b} - \vec{a} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3) \text{ であり}$$

$$|\vec{b} - \vec{a}|^2 = |\vec{a}|^2 - 2(\vec{a} \cdot \vec{b}) + |\vec{b}|^2 \text{ より}$$

$$(\text{左辺}) = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2$$

$$= b_1^2 - 2a_1 b_1 + a_1^2 + b_2^2 - 2a_2 b_2 + a_2^2 + b_3^2 - 2a_3 b_3 + a_3^2$$

$$(\text{右辺}) = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) + (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - 2(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

であるから

$$2(\vec{a} \cdot \vec{b}) = 2a_1 b_1 + 2a_2 b_2 + 2a_3 b_3$$

よって

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

例題) 3点 $A(1, 3, 2)$, $B(2, 5, 3)$, $C(-1, 5, 6)$

を頂点とする $\triangle ABC$ において, $\angle BAC$ の大きさを求めよ。

まずは成分を作成する (BからAを引く, CからAを引く)

解答 $\overrightarrow{AB} = (2-1, 5-3, 3-2) = (1, 2, 1)$

$$\overrightarrow{AC} = (-1-1, 5-3, 6-2) = (-2, 2, 4)$$

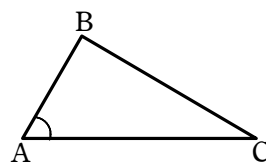
であるから $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 1 \times (-2) + 2 \times 2 + 1 \times 4 = 6$

また $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{6}$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

よって $\cos \angle BAC = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}|} = \frac{6}{\sqrt{6} \times 2\sqrt{6}} = \frac{1}{2}$

$0^\circ \leq \angle BAC \leq 180^\circ$ であるから $\angle BAC = 60^\circ$



厳密に図示しなくてもOK

内積を求める

内積が0で無いなら

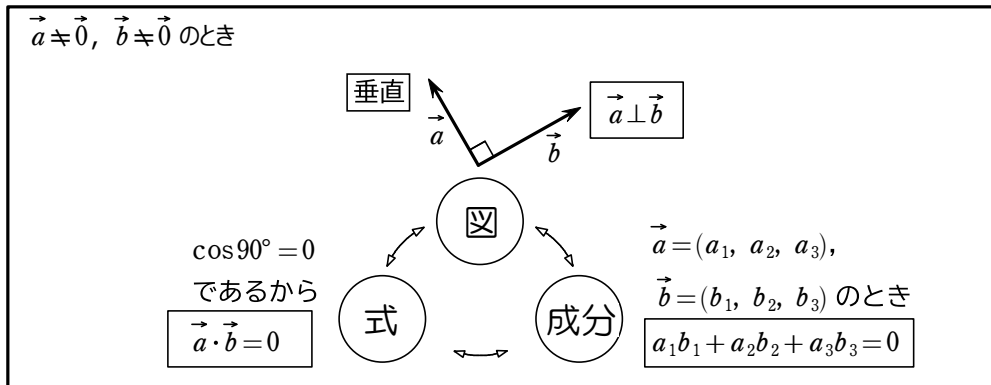
大きさを求める

コサインの式に代入する

◆◇ 垂直時の内積の関係性 ◇◆

□ベクトルの垂直条件

空間においても、平面の場合と同様に「 $\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ 」が成り立つ。したがって、成分で表された空間のベクトルの垂直条件について、「 $\vec{a} \perp \vec{b} \iff a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$ 」も成り立つ。



ベクトルの垂直条件を利用して、ベクトルの成分を求めよう。

例題 2) 2つのベクトル $\vec{a} = (1, 2, 6)$, $\vec{b} = (-1, 1, 0)$ の両方に垂直で、大きさが3であるベクトル $\vec{p}$ を求めよ。

解答 $\vec{p} = (x, y, z)$ とする。

垂直で

$$\vec{a} \perp \vec{p} \text{ であるから } \vec{a} \cdot \vec{p} = 0$$

$$\text{すなわち } x + 2y + 6z = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\vec{b} \perp \vec{p} \text{ であるから } \vec{b} \cdot \vec{p} = 0$$

$$\text{すなわち } -x + y = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

大きさが3 $|\vec{p}|^2 = 3^2$ であるから $x^2 + y^2 + z^2 = 9 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$

①, ② から x, y を z で表して

$$x = -2z, \quad y = -2z$$

これを ③ に代入して $9z^2 = 9$ ゆえに $z = \pm 1$

$z = 1$ のとき $x = y = -2$

$z = -1$ のとき $x = y = 2$

よって $\vec{p} = (-2, -2, 1), (2, 2, -1)$

垂直が出てきたら
垂直条件を

<補足>

$\vec{p} = (\pm 2, \pm 2, \mp 1)$ (複号同順)
と書くこともある。

コラム ベクトルの外積 (発展)

空間のベクトルでは、空間特有の演算として **外積** というものを考えることができます。

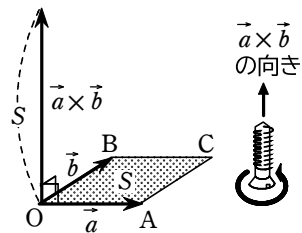
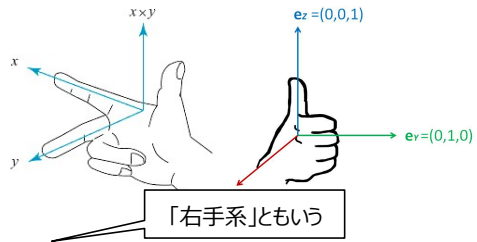
ここでは、 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の外積を $\vec{a} \times \vec{b}$ と表します。

外積 $\vec{a} \times \vec{b}$ は、 $\vec{a}$ にも $\vec{b}$ にも垂直なベクトルで、

その向きは、 $\vec{a}$ から $\vec{b}$ へ $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ の角度 θ でまわるとき、右ねじの進む向きと定めます。

(右ねじとは時計回りにまわすと奥に進むねじです。)

また、 $\vec{a} \times \vec{b}$ の大きさは、図のように $\vec{a}$ と $\vec{b}$ でできる平行四辺形 $OACB$ の面積です。また、 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の少なくとも一方が $\vec{0}$ のとき、 $\vec{a}$ と $\vec{b}$ が平行のときはその外積は $\vec{0}$ と定めます。



確認 座標空間において、 x 軸、 y 軸、 z 軸の正の向きと同じ向きの単位ベクトルを、

それぞれ $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ とする。このとき、 $\vec{e}_1 \times \vec{e}_2$, $\vec{e}_2 \times \vec{e}_3$, $\vec{e}_3 \times \vec{e}_1$ を、それぞれ $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$

で表してみよう。

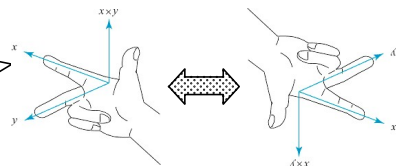
解答 $\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3$, $\vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1$, $\vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2$

ただし外積では向きが変わると符号が変わる。

つまり $\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ について $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ である

$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ が平行であるのならば

$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ である (平行四辺形の面積は 0)



○ $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ の外積を成分で表してみましょう。

発見 ベクトルの外積には、内積と同じように、次の性質があります。

$$\begin{aligned} \vec{a} \times (k\vec{b} + l\vec{c}) &= k(\vec{a} \times \vec{b}) + l(\vec{a} \times \vec{c}), & (k\vec{a} + l\vec{b}) \times \vec{c} &= k(\vec{a} \times \vec{c}) + l(\vec{b} \times \vec{c}) \\ (k\vec{a}) \times \vec{b} &= \vec{a} \times (k\vec{b}) = k(\vec{a} \times \vec{b}) \end{aligned}$$

$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$, $\vec{b} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3$ から、上の性質を利用して、外積の成分表示を求める方法を考えてみよう。

解答 $\vec{a} \times \vec{b} = (a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3) \times (b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3)$

と変形することができる。これを与えられた性質を用いて

$\vec{a} \times \vec{b} = \bigcirc \vec{e}_1 + \square \vec{e}_2 + \triangle \vec{e}_3$ の形で表すことができれば

外積の成分表示は (○, □, △) である

まとめ 2つのベクトル $\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}=(b_1, b_2, b_3)$ の外積を

$\vec{x}=(x_1, x_2, x_3)$ とするとき, 次のことを示してみよう。

$$x_1 = a_2b_3 - a_3b_2, \quad x_2 = a_3b_1 - a_1b_3, \quad x_3 = a_1b_2 - a_2b_1$$

解答 $\vec{a} \times \vec{b} = (a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3) \times (b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3)$
 $= (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{e}_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)\vec{e}_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{e}_3$

したがって

$$x_1 = a_2b_3 - a_3b_2, \quad x_2 = a_3b_1 - a_1b_3, \quad x_3 = a_1b_2 - a_2b_1,$$

各成分がそれ以外の成分を互いに互い違いに掛けて差をとっている

例) x 成分なら y 成分と z 成分を互い違いにかけて差をとる

※ 具体的な計算方法は例題3の別解にて説明

例題3) 2つのベクトル $\vec{a}=(2, -1, 0)$, $\vec{b}=(6, -2, 1)$ の両方に垂直で,
 大きさが3のベクトル $\vec{p}$ を求めよ。

外積を用いた**解答**は

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ に垂直なベクトルのひとつを $\vec{n}$ とすると $\vec{a}=(2, -1, 0)$, $\vec{b}=(6, -2, 1)$ より

太い方のペアを先に掛けて
細い方を後に掛けて引き算する

③ $-4 + 6 = 2$

x 成分と
 y 成分を
掛けているので
 z 成分ができる

① $-1 - 0 = -1$

y 成分と
 z 成分を
掛けているので
 x 成分ができる

② $0 - 2 = -2$

z 成分と
 x 成分を
掛けているので
 y 成分ができる

順番通り並べると $\vec{n} = (-1, -2, 2)$ 垂直で

ここで $|\vec{n}| = \sqrt{1+4+4} = \sqrt{9} = 3$ であるから求めるベクトルは 大きさが3

$$\pm \frac{3}{|\vec{n}|} \vec{n} = \pm \frac{3}{3} (-1, -2, 2) = (\pm 1, \pm 2, \mp 2) \quad (\text{複号同順})$$