

【態度目標】しゃべる、質問する、説明する、動く、協力する、貢献する

【内容目標】平面のときと同様に空間における位置ベクトルについて理解できる。

□位置ベクトル

空間においても、1点 O を固定すると、任意の点 P の位置は、ベクトル $\vec{p} = \vec{OP}$ によって定められる。このとき、 $\vec{p}$ を点 O に関する点 P の位置ベクトルという。また、位置ベクトルが $\vec{p}$ である点 P を $P(\vec{p})$ で表す。空間の場合にも、平面の場合と同様に、次のことが成り立つ。

$$1 \quad 2 \text{ 点 } A(\vec{a}), B(\vec{b}) \text{ に対して } \vec{AB} = \vec{b} - \vec{a}$$

$$2 \quad 2 \text{ 点 } A(\vec{a}), B(\vec{b}) \text{ を結ぶ線分 } AB \text{ を } m:n \text{ に内分する点 } P, \\ \text{外分する点 } Q \text{ の位置ベクトルを、それぞれ } \vec{p}, \vec{q} \text{ とすると}$$

$$\vec{p} = \frac{n\vec{a} + m\vec{b}}{m+n}, \quad \vec{q} = \frac{-n\vec{a} + m\vec{b}}{m-n}$$

基本的には
平面のときと
同じ話です

$$\text{特に、線分 } AB \text{ の中点 } M \text{ の位置ベクトル } \vec{m} \text{ は } \vec{m} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$$

$$3 \quad 3 \text{ 点 } A(\vec{a}), B(\vec{b}), C(\vec{c}) \text{ を頂点とする } \triangle ABC \text{ の重心 } G \text{ の位置ベクトル } \vec{g} \text{ は}$$

$$\vec{g} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}$$

例6) 4点 $A(\vec{a}), B(\vec{b}), C(\vec{c}), D(\vec{d})$ を頂点とする四面体 $ABCD$ において、

$\triangle BCD$ の重心を $G(\vec{g})$ 、線分 AG を $3:1$ に内分する点を $H(\vec{h})$ とする。このとき

$$\vec{OG} = \frac{\vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD}}{3} \quad \text{より}$$

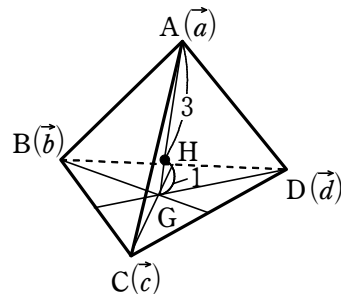
$$\vec{g} = \frac{\vec{b} + \vec{c} + \vec{d}}{3}$$

H は線分 AG を $3:1$ に内分する点であるから

$$\vec{OH} = \frac{1 \cdot \vec{OA} + 3 \cdot \vec{OG}}{3+1} \quad \text{より}$$

よって、 H の位置ベクトル $\vec{h}$ は、次のようになる。

$$\vec{h} = \frac{\vec{a} + 3\vec{g}}{3+1} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}}{4} \quad \text{終}$$



四面体 $ABCD$ において、各頂点とその対面の三角形の重心を結ぶ線分はすべて1点 H で交わり、各線分は H で $3:1$ に内分される。この点 H を、四面体 $ABCD$ の重心という。

$$\vec{h} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}}{4}$$

応用例題 1)

四面体 ABCD の辺 AB, BC, CD, DA, AC, BD の中点を,
それぞれ K, L, M, N, Q, R とすると, 3 つの線分 KM, LN, QR の中点は
一致することを証明せよ。

【解説】 3 つの線分 KM, LN, QR の中点の位置ベクトルを,
4 点 A, B, C, D の位置ベクトルで表し, それらが同じであることを示す。

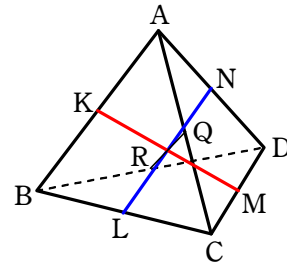
【解答】 点 A, B, C, D, K, L, M, N, Q, R の位置ベクトルを,

それぞれ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{k}, \vec{l}, \vec{m}, \vec{n}, \vec{q}, \vec{r}$ とすると

$$\vec{k} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}, \quad \vec{l} = \frac{\vec{b} + \vec{c}}{2}$$

$$\vec{m} = \frac{\vec{c} + \vec{d}}{2}, \quad \vec{n} = \frac{\vec{d} + \vec{a}}{2}$$

$$\vec{q} = \frac{\vec{a} + \vec{c}}{2}, \quad \vec{r} = \frac{\vec{b} + \vec{d}}{2}$$



よって, 線分 KM, LN, QR の中点の位置ベクトルは, それぞれ次のようになる。

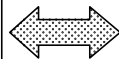
$$\frac{\vec{k} + \vec{m}}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\vec{a} + \vec{b}}{2} + \frac{\vec{c} + \vec{d}}{2} \right) = \frac{1}{4} (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d})$$

$$\frac{\vec{l} + \vec{n}}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\vec{b} + \vec{c}}{2} + \frac{\vec{d} + \vec{a}}{2} \right) = \frac{1}{4} (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d})$$

$$\frac{\vec{q} + \vec{r}}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\vec{a} + \vec{c}}{2} + \frac{\vec{b} + \vec{d}}{2} \right) = \frac{1}{4} (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d})$$

ゆえに, 3 つの線分 KM, LN, QR の中点は一致する。【終】

四面体 ABCD において、
向かい合う 2 つの辺の
それぞれの中点を結ぶ
線分の中点の位置ベクトルは
いずれも $\frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}}{4}$



四面体 ABCD において、各頂点と
その対面の三角形の重心を結ぶ
線分はすべて 1 点 H で交わり、
各線分は H で 3 : 1 に内分される。
この点 H を, 四面体 ABCD の重心
という。

$$\vec{h} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}}{4}$$

【注意】応用例題 1 における 3 つの線分 KM, LN, QR の中点は,

四面体 ABCD の重心 H に一致している。