

【態度目標】しゃべる、質問する、説明する、動く、協力する、貢献する

【内容目標】球面などの空間図形を、方程式で表すことができる。

□線分の内分点・外分点の座標

座標空間の2点 $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$ について, A, B 間の距離を表す式は,
 $AB = |\overrightarrow{AB}|$ であることから得られる。

2点 $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ を結ぶ線分 AB を $m:n$ に内分する点を P , 外分する点を Q とし, O を原点とすると

$$\overrightarrow{OP} = \frac{n\overrightarrow{OA} + m\overrightarrow{OB}}{m+n}, \quad \overrightarrow{OQ} = \frac{-n\overrightarrow{OA} + m\overrightarrow{OB}}{m-n}$$

と表されるから, 次のことが成り立つ。

2点 $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ を結ぶ線分 AB について

A, B 間の距離は

$$AB = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

$m:n$ に内分する点の座標は

$$\left(\frac{nx_1 + mx_2}{m+n}, \frac{ny_1 + my_2}{m+n}, \frac{nz_1 + mz_2}{m+n} \right)$$

$m:n$ に外分する点の座標は

$$\left(\frac{-nx_1 + mx_2}{m-n}, \frac{-ny_1 + my_2}{m-n}, \frac{-nz_1 + mz_2}{m-n} \right)$$

中点の座標は

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2} \right)$$

$C(x_3, y_3, z_3)$ とすると 重心の座標は

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}, \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3} \right)$$

$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$ の
大きさを求めたと考える。

各座標ごとに計算してもよい

z 座標の分増やせばOK

問8) 3点 $A(1, -4, 7)$, $B(7, 2, -5)$, $C(1, -4, 1)$ に対して,

次の各点の座標を求めよ。

(1) 線分 AB を $2:1$ に内分する点, 外分する点

【解答】 内分点の座標を (x, y, z) , 外分点の座標を (x', y', z') とする。

$$x = \frac{1 \times 1 + 2 \times 7}{2+1} = 5, \quad y = \frac{1 \times (-4) + 2 \times 2}{2+1} = 0, \quad z = \frac{1 \times 7 + 2 \times (-5)}{2+1} = -1$$

□ (5, 0, -1)

$$x' = \frac{-1 \times 1 + 2 \times 7}{2-1} = 13, \quad y' = \frac{-1 \times (-4) + 2 \times 2}{2-1} = 8, \quad z' = \frac{-1 \times 7 + 2 \times (-5)}{2-1} = -17$$

□ (13, 8, -17)

(2) 線分 AB を 1 : 2 に内分する点, 外分する点

[解答] 内分点の座標を (x, y, z) , 外分点の座標を (x', y', z') とする。

$$x = \frac{2 \times 1 + 1 \times 7}{1 + 2} = 3, \quad y = \frac{2 \times (-4) + 1 \times 2}{1 + 2} = -2, \quad z = \frac{2 \times 7 + 1 \times (-5)}{1 + 2} = 3$$

答 $(3, -2, 3)$

$$x' = \frac{-2 \times 1 + 1 \times 7}{1 - 2} = -5, \quad y' = \frac{-2 \times (-4) + 1 \times 2}{1 - 2} = -10, \quad z' = \frac{-2 \times 7 + 1 \times (-5)}{1 - 2} = 19$$

答 $(-5, -10, 19)$

(3) 線分 AB の中点

[解答] 線分 AB の中点の座標を (x, y, z) とすると

$$x = \frac{1 + 7}{2} = 4, \quad y = \frac{-4 + 2}{2} = -1, \quad z = \frac{7 - 5}{2} = 1$$

答 $(4, -1, 1)$ (4) $\triangle ABC$ の重心[解答] $\triangle ABC$ の頂点 A, B, C および重心 G の原点 O に関する位置ベクトルを, それぞれ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{g}$ とすると

$$\vec{a} = (1, -4, 7), \quad \vec{b} = (7, 2, -5), \quad \vec{c} = (1, -4, 1)$$

である。よって

$$\vec{g} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}$$

$$= \frac{1}{3} \{(1, -4, 7) + (7, 2, -5) + (1, -4, 1)\}$$

$$= (3, -2, 1) \quad \text{答 } (3, -2, 1)$$

$\vec{OG} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}}{3}$ から
導いてもよい

□座標軸に垂直な平面の方程式

座標軸に垂直な平面について考えてみよう。

点 $P(a, b, c)$ を通り, x 軸に垂直な平面を α とする。

平面 α 上の点の x 座標は常に a であり,

α は方程式 $x = a$ を満たす点全体の集合である。

よって, $x = a$ は平面 α の方程式である。

また, 平面 α は x 軸に垂直であるから, yz 平面に平行である。

一般に, 次のことがいえる。

座標軸に垂直な平面の方程式

点 $P(a, b, c)$ を通り, x 軸に垂直な平面

(yz 平面に平行な平面) の方程式は $x = a$

点 $P(a, b, c)$ を通り, y 軸に垂直な平面

(zx 平面に平行な平面) の方程式は $y = b$

点 $P(a, b, c)$ を通り, z 軸に垂直な平面

(xy 平面に平行な平面) の方程式は $z = c$

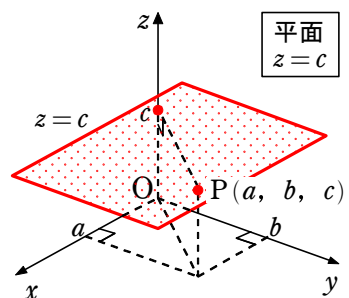
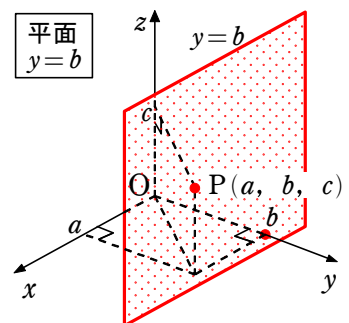
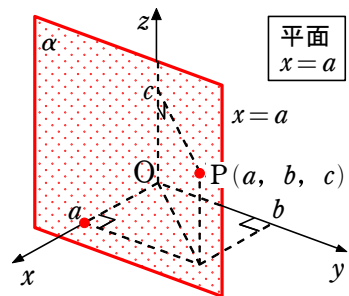
$x = a$ は

座標平面上の場合であれば「 $x = a$; y はすべての実数」

座標空間内の場合であれば「 $x = a$; y, z はすべての実数」

であることを省略してかいていることになる。

何を指しているかを考えよう。



＜注意＞ 平面 $x = a$ は x 軸に垂直,
平面 $y = b$ は y 軸に垂直,
平面 $z = c$ は z 軸に垂直である。

○軸に垂直
と聞かれたら
○=を答える

【補足】 深める 「 $x = 3$ かつ $y = 1$ 」は, 座標空間でどのような図形を表すだろうか。

【解答】

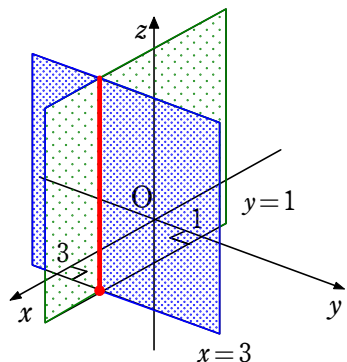
平面 $x = 3$ と平面 $y = 1$ の共通部分を表す。

この2平面は交わるから, その共通部分は直線である。

すなわち, 「 $x = 3$ かつ $y = 1$ 」は

座標空間上で直線 $x = 3$ かつ $y = 1$ を表す。

「 $x = 3$ かつ $y = 1$ 」は, 座標平面では
どのような図形を表すだろうか



発展 平面の方程式

空間において、平面は、その平面上の1点と、その平面に垂直なベクトルが与えられると定まる。

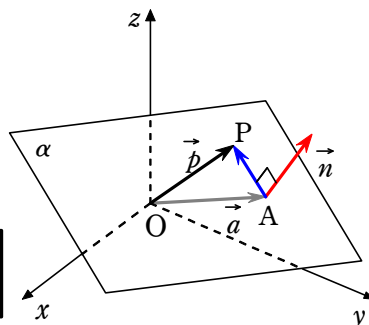
点 $A(\vec{a})$ を通り、 $\vec{0}$ でないベクトル $\vec{n}$ に垂直な平面を α とする。点 $P(\vec{p})$ が平面 α 上にあることは

$$\vec{n} \perp \overrightarrow{AP} \quad \text{または} \quad \overrightarrow{AP} = \vec{0}$$

が成り立つことと同値である。これは、内積を用いて、 $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$ と表される。

すなわち $\vec{n} \cdot (\vec{p} - \vec{a}) = 0$ …… ①
これを平面 α のベクトル方程式という。

垂直が出てきたら
垂直条件を



点 O を座標空間の原点と考えて、点 A の座標を (x_1, y_1, z_1) 、平面 α 上の点 P の座標を (x, y, z) とし、 $\vec{n} = (a, b, c)$ とすると、 $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ 、 $\vec{p} = (x, y, z)$ であるから、 $\vec{p} - \vec{a} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1)$ であり、①は次のようになる。

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0 \quad \text{…… ②}$$

②は点 $A(x_1, y_1, z_1)$ を通り、 $\vec{0}$ でないベクトル $\vec{n} = (a, b, c)$ に垂直な平面の方程式

$$\Downarrow \quad d = -ax_1 - by_1 - cz_1 \quad \text{とおくと}$$

平面の方程式は x, y, z の1次方程式 $ax + by + cz + d = 0$ で表される

一般形という

一般に、 x, y, z の1次方程式 $ax + by + cz + d = 0$ は平面を表す。

平面に垂直な直線を、その平面の **法線** といい、平面に垂直なベクトルを、その平面の **法線ベクトル** という。

$\vec{n} = (a, b, c)$ は、平面 $ax + by + cz + d = 0$ の法線ベクトルの1つである。

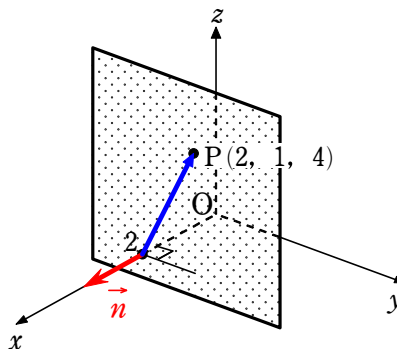
練習24の別解

点 $(2, 1, 4)$ を通り、 x 軸に垂直な平面の方程式は
法線ベクトルの1つを $\vec{n} = (1, 0, 0)$ とみると

解答 $1 \times (x - 2) + 0 \times (y - 1) + 0 \times (z - 4) = 0$

より $x = 2$

と求めることもできる



【補足例】3点A(5, 4, 0), B(0, 5, 3), C(4, 0, 2)を通る平面の方程式を求めよ。

【解答】【図形と方程式のときのように代数的に処理すると…】

求める方程式を $ax + by + cz + d = 0$ とする。点A, B, Cの座標を代入して

$$5a + 4b + d = 0, \quad 5b + 3c + d = 0, \quad 4a + 2c + d = 0$$

$$\begin{array}{rcl} \text{これから} & 5a + 4b & + d = 0 \\ & -) \quad 4a & + 2c + d = 0 \\ \hline & a + 4b - 2c & = 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} & 4a & + 2c + d = 0 \\ & -) \quad 5b + 3c + d = 0 \\ \hline & 4a - 5b - c & = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} & 8a - 10b - 2c & = 0 \\ & -) \quad a + 4b - 2c = 0 \\ \hline & 7a - 14b & = 0 \end{array}$$

$$a = 2b, \quad c = 3b, \quad d = -14b \quad \text{よって} \quad 2bx + by + 3bz - 14b = 0$$

$b = 0$ とすると、平面の方程式にならないから $b \neq 0$

したがって、求める平面の方程式は $2x + y + 3z - 14 = 0$

【別解】【ベクトルの共面条件で処理すると…】

3点A($\vec{a}$), B($\vec{b}$), C($\vec{c}$)で定まる平面を α とすると,

α 上の任意の点P($\vec{p}$)について

$$\vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b} + u\vec{c}, \quad s + t + u = 1$$

が成り立つことを用いる

$$\vec{p} = (x, y, z), \quad \vec{a} = (5, 4, 0), \quad \vec{b} = (0, 5, 3), \quad \vec{c} = (4, 0, 2) \text{ を}$$

$$\vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b} + u\vec{c} \text{ に代入して成分で書くと}$$

$$(x, y, z) = s(5, 4, 0) + t(0, 5, 3) + u(4, 0, 2)$$

より

$$x = 5s + 4u, \quad y = 4s + 5t, \quad z = 3t + 2u$$

これを s, t, u について解くと

$$\begin{array}{rcl} x & = & 5s + 4u \\ -) & 2z & = 6t + 4u \\ \hline x - 2z & = & 5s - 6t \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} 6y & = & 24s + 30t \\ +) & 5x - 10z & = 25s - 30t \\ \hline 5x + 6y - 10z & = & 49s \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} 4x - 8z & = & 20s - 24t \\ -) & 5y & = 20s + 25t \\ \hline 4x - 5y - 8z & = & -49t \end{array}$$

$$\begin{aligned} 2u = z - 3t \text{ より} \quad 2u \cdot 49 &= 49z + 3 \cdot (-49t) \\ &= 49z + 3(4x - 5y - 8z) \\ &= 12x - 15y + 25z \end{aligned}$$

$$s + t + u = 1 \text{ より} \quad 2 \cdot 49s + 2 \cdot 49t + 2 \cdot 49u = 2 \cdot 49$$

$$(10x + 12y - 20z) + (-8x + 10y + 16z) + (12x - 15y + 25z) = 2 \cdot 49$$

$$14x + 7y + 21z = 2 \cdot 49$$

$$\text{よって} \quad 2x + y + 3z = 14 \quad \text{なので} \quad 2x + y + 3z - 14 = 0$$

点 $P(x_1, y_1, z_1)$ と平面 $ax+by+cz+d=0$ の距離 h は, 次の式で与えられる。

$$h = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

z 座標の分増やせばOK

46 ページでは「点と直線の距離」を与える式をベクトルを用いて証明しているが, 上の式もそれとほぼ同じ方法で証明することができる。

【証明】 平面 $ax+by+cz+d=0$ を α とする。

点 P から平面 α に垂線 PH を下ろすと

$$h = |\overrightarrow{PH}| \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$\vec{n} = (a, b, c)$ は平面 α の法線ベクトルで,

$\overrightarrow{PH}$ は $\vec{n}$ に平行であるから 平行条件 (共線条件)

$$\overrightarrow{PH} = t\vec{n} = t(a, b, c) \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

となる実数 t がある。

$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PH}$ から, H の座標は

$$(x_1 + ta, y_1 + tb, z_1 + tc)$$

と表される。点 H は平面 α 上の点であるから

$$a(x_1 + ta) + b(y_1 + tb) + c(z_1 + tc) + d = 0$$

$$\text{すなわち} \quad t(a^2 + b^2 + c^2) + (ax_1 + by_1 + cz_1 + d) = 0$$

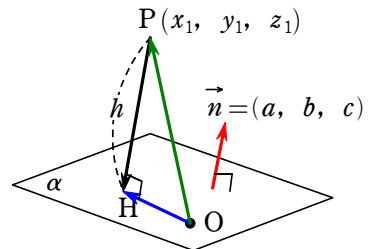
$$\text{よって} \quad t = -\frac{ax_1 + by_1 + cz_1 + d}{a^2 + b^2 + c^2} \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$\text{したがって} \textcircled{1}\textcircled{2}\textcircled{3} \text{より} \quad h = |\overrightarrow{PH}| = |t||\vec{n}|$$

$$= \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{a^2 + b^2 + c^2} \times \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$= \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

終

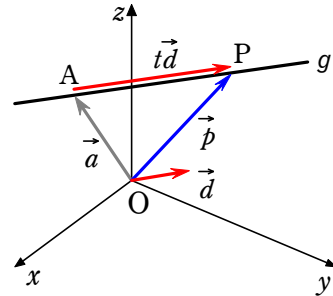


発展 直線の方程式

空間において、点 $A(\vec{a})$ を通り、 $\vec{0}$ でないベクトル $\vec{d}$ に平行な直線を g とする。直線 g 上の点を $P(\vec{p})$ とすると、 $\vec{p}$ は次のように表される。

$$\vec{p} = \vec{a} + t\vec{d} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

ただし t は実数



これを直線 g の **ベクトル方程式** という。 t を **媒介変数** または **パラメータ** といい、 $\vec{d}$ を直線 g の **方向ベクトル** という。

点 O を座標空間の原点と考えて、点 A の座標を (x_1, y_1, z_1) 、直線 g 上の点 P の座標を (x, y, z) とし、 $\vec{d} = (l, m, n)$ とすると、
 $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ 、 $\vec{p} = (x, y, z)$ であるから、 $\textcircled{1}$ は次のようになる。

$$(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + t(l, m, n) = (x_1 + lt, y_1 + mt, z_1 + nt)$$

よって

$$\begin{cases} x = x_1 + lt \\ y = y_1 + mt \\ z = z_1 + nt \end{cases} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{2}$ の式を直線 g の **媒介変数表示** または **パラメータ表示** という。

$lmn \neq 0$ のとき、 $\textcircled{2}$ から t を 3 通りに表すと、次の関係式が得られる。

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}$$

これは、点 $A(x_1, y_1, z_1)$ を通り、ベクトル $\vec{d} = (l, m, n)$ に平行な **直線の方程式** である。

例 1) 点 $(2, 3, -1)$ を通り、ベクトル $\vec{d} = (3, -4, 5)$ に平行な直線の方程式は

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z+1}{5}$$

終

問題3) ベクトル $\vec{a}=(1, 2, 2)$ が x 軸, y 軸, z 軸の正の向きとなす角を,
それぞれ α, β, γ とするとき, $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ の値を求めよ。

【解答】 $\vec{e}_1=(1, 0, 0), \vec{e}_2=(0, 1, 0), \vec{e}_3=(0, 0, 1)$ とする。

これらのベクトルと $\vec{a}$ のなす角は, それぞれ α, β, γ である。

$|\vec{a}|=\sqrt{1^2+2^2+2^2}=3$ であるから

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{e}_1}{|\vec{a}| |\vec{e}_1|} = \frac{1}{3 \times 1} = \frac{1}{3}$$

$$\cos\beta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{e}_2}{|\vec{a}| |\vec{e}_2|} = \frac{2}{3 \times 1} = \frac{2}{3}$$

$$\cos\gamma = \frac{\vec{a} \cdot \vec{e}_3}{|\vec{a}| |\vec{e}_3|} = \frac{2}{3 \times 1} = \frac{2}{3}$$

【補足】

$\vec{0}$ でない空間ベクトル $\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$ が基本ベクトル $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ となす角を, それぞれ α, β, γ とすると

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{e}_1}{|\vec{a}| |\vec{e}_1|} = \frac{a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 0 + a_3 \cdot 0}{|\vec{a}|} = \frac{a_1}{|\vec{a}|}$$

$$\cos\beta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{e}_2}{|\vec{a}| |\vec{e}_2|} = \frac{a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 1 + a_3 \cdot 0}{|\vec{a}|} = \frac{a_2}{|\vec{a}|}$$

$$\cos\gamma = \frac{\vec{a} \cdot \vec{e}_3}{|\vec{a}| |\vec{e}_3|} = \frac{a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0 + a_3 \cdot 1}{|\vec{a}|} = \frac{a_3}{|\vec{a}|}$$

$$\text{ゆえに } (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

となり, これは $\vec{a}$ と同じ向きの単位ベクトルである。

また, この $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ を $\vec{a}$ の方向余弦 という。

$\vec{a}$ の方向余弦を成分とするベクトルは, $\vec{a}$ と同じ向きの単位ベクトルである。

したがって, $\vec{a}=(1, 2, 2)$ とおくと $|\vec{a}|=\sqrt{1+4+4}=3$ より

$$\cos\alpha = \frac{1}{3}, \cos\beta = \frac{2}{3}, \cos\gamma = \frac{2}{3}$$

また, $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ である。

(たとえば上の問では $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9} = 1$ となる)