第137回
数学教育実践研究会
レポート発表

カンで当てよう！「図形と方程式」

旭川北高等学校
岡崎知之

1

0　はじめに

【岡崎のジレンマ】

- 今年βコースの授業を担当することになった
- 生徒の気持ち
  「意味わかんない」　「先生の解き方真似すればいいんでしょ」
- 「図形と方程式」では特に顕著
  （図形→方程式→解くの連発）
- そもそも必ず解析的に解かなきゃいけないのか

2

0　はじめに

【岡崎の結論】

- 方程式にこだわらなくても良いのでは？
- 生徒が今持っている知識や能力で問題が解決出来たら、問題解決のモチベーションにつながるのでは？

3

1　具体策A

01
幾何学を利用して、ざっくり答を予想させる

02
答の確かめとして、方程式を利用する

03
幾何学的解法と解析学的解法を比べて、それぞれの良さを評価する

4

1　具体策A

Q１．点A$(1, 2)$，点B$(4, 6)$に対して，線分ABの長さを求めよ。

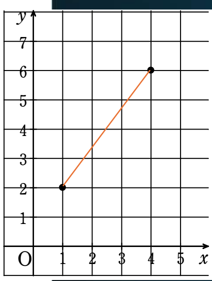
5

1　具体策A

このグラフをもとに、答を予想しよう！

その予想を周りの人と比べてみよう！

⇒楽しく取り組んでいた
　予想的中率も高かった



6

1　具体策 A

Q２．点A $(1, 1)$，点B$(4, 7)$ に対して，線分ABを $1:2$ に内分する点Cの座標を求めよ。

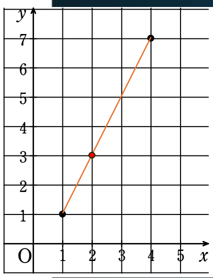
7

1　具体策 A

グラフ内に答となる点を打ってみよう！

その予想を周りの人と比べてみよう！

⇒楽しく取り組んでいた
予想的中率も高かった



8

1　具体策 A

Q３．次の３点 A，B，C を頂点とする △ABC の重心の座標を求めよ。
A$(-2,\ 5)$，B$(1,\ -3)$，C$(7,\ 1)$

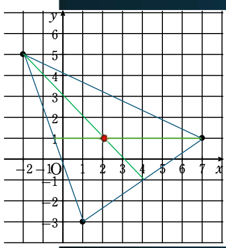
9

1　具体策 A

グラフ内に答となる点を打ってみよう！

その予想を周りの人と比べてみよう！

⇒そもそも重心って何だっけ？（対策済）
重心の定義が分かったら、的中率も
上がった



10

1　具体策 A

Q４．点 A$(-1,\ 3)$ に関して，点 P$(1,\ -1)$ と対称な点 Q の座標を求めよ。

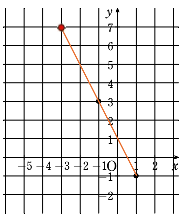
11

1　具体策 A

グラフ内に答となる点を打ってみよう！

その予想を周りの人と比べてみよう！

⇒どこが対称の中心なの？
「～に関して」が中心だよ、と伝えたら
難なく的中できた。



12

1　具体策A

Q5．直線 $2x-y-3=0$ に関して点 A $(1,\ 4)$ と対称な点 B の座標を求めよ。

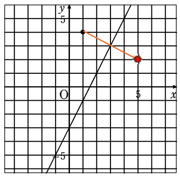
13

1　具体策A

グラフ内に答となる点を打ってみよう！

その予想を周りの人と比べてみよう！

⇒どこに点を打てばいいの？
「折り返して移る点」と伝えたら、
的中率が上がった。



14

1　具体策A

Q６．原点 $(0,0)$ と直線 $3x+4y+60=0$ との距離を求めよ。

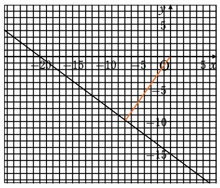
15

1　具体策A

答となる長さを予想してみよう！

その予想を周りの人と比べてみよう！

⇒「〇cm」と答える生徒が…
「目盛り１を１とする」と伝えたら、
的中率が上がった。



16

1　具体策Aを試してみて

- 予想以上に問題の設定を理解できていないことが分かった（AI vs. 教科書が読めない子どもたち（新井紀子著）で指摘の通り）
- 作図・測定は積極的に取り組む
- 方程式を使って解いた答に対する納得感が生まれる
- 問題設定には工夫が必要（答を整数値にするetc）

17

2　具体策B

01
中学校で習った方法で問題を解く

02
高校で教える方法で問題を解く

03
両者を比較して、それぞれのよさを見つける

18

2　具体策Ｂ

Ｑ７．点（$2,5$）を通り、傾きが３の直線の方程式を中学校で習った方法で求めよ。

19

1. 中学生向けの解き方（y = ax + b の利用）

中学生の数学（一次関数）では、直線の式を $y = ax + b$ と置いて計算します。

- **傾きを代入する**
  求める一次関数の式は、傾きが 3 なので $a = 3$ と分かります。
  したがって、式は $y = 3x + b$ と表せます。
- **通る点の座標を代入する**
  この直線は点(2,5)を通るため、$x = 2$，$y = 5$ を上記の式に代入します。

$$5 = 3 \times 2 + b$$

- **切片 b を計算する**
  方程式を解いて、切片 b を求めます。

$$5 = 6 + b$$

$$b = -1$$

- **式を完成させる**
  求めた $b = -1$ を $y = 3x + b$ に戻します。
  答：$y = 3x - 1$

20

2. 高校生向けの解き方（直線の公式の利用）

高校生の数学（図形と方程式）では、「点(x_1, y_1)を通り、傾きがmの直線の方程式」の公式 $y - y_1 = m(x - x_1)$ を使って1行で立式します。

- **公式に値を代入する**
  傾き $m = 3$、通る点 $(x_1, y_1) = (2, 5)$ を公式に代入します。

$$y - 5 = 3(x - 2)$$

- **式を整理する**
  右辺を展開して、$y =$ の形に整理します。

$$y - 5 = 3x - 6$$

$$y = 3x - 1$$

答：$y = 3x - 1$

21

2　具体策Ｂ

Ｑ８．2 直線 $x + 2y - 4 = 0$，$2x - y - 3 = 0$ の交点と点（-1，5）を通る直線の方程式を求めよ。

22

1. 中学生向けの解き方（交点を求めてから2点を通る式を出す）

中学生の数学では、まず**2つの直線の交点の座標（x, y）を連立方程式で直接求める**ことから始めます。

① 2直線の交点を求める

2つの直線の式を、解きやすいように変形して連立方程式で解きます。

- $x + 2y = 4$ …①
- $2x - y = 3$ …②

②の式を2倍して、①の式と足し合わせることで y を消去します。

- $4x - 2y = 6$（② × 2）
- $(x + 2y) + (4x - 2y) = 4 + 6$
- $5x = 10 \to \mathbf{x = 2}$

$x = 2$ を①に代入します。

- $2 + 2y = 4 \to 2y = 2 \to \mathbf{y = 1}$

よって、**交点の座標は (2, 1)** です。

23

② 2点 (2, 1) と (−1, 5) を通る直線の式を求める

求める一次関数の式を $y = ax + b$ と置きます。2つの点の座標をそれぞれ代入します。

- $1 = 2a + b$ …③
- $5 = -a + b$ …④

③から④を引いて b を消去します。

- $(1 - 5) = (2a - (-a))$
- $-4 = 3a \to \mathbf{a} = -\frac{4}{3}$

$a = -\frac{4}{3}$ を④に代入して b を求めます。

- $5 = -(-\frac{4}{3}) + b$
- $5 = \frac{4}{3} + b \to b = \frac{15}{3} - \frac{4}{3} = \mathbf{\frac{11}{3}}$

答：$\mathbf{y = -\frac{4}{3}x + \frac{11}{3}}$
(※中学生向けとしては、こちらの交点計算でミスが出やすいため、丁寧な検算がおすすめです)

24

2. 高校生向けの解き方（直線束の公式 $f(x, y) + kg(x, y) = 0$ の利用）

高校生の数学II（図形と方程式）では、交点をわざわざ求めずに、**2直線の交点を通る直線群の公式**を使って一撃で解くのがスマートです。

① 直線束（しきそく）の公式に当てはめる

2直線 $x + 2y - 4 = 0$ と $2x - y - 3 = 0$ の交点を通る直線は、実数 k を用いて次のように表せます。

$$(x + 2y - 4) + k(2x - y - 3) = 0 \quad \dots$$

② 点 $(-1, 5)$ の座標を代入して k を求める

この直線⑤が点 $(-1, 5)$ を通るので、$x = -1$，$y = 5$ を代入します。

$$\{(-1) + 2(5) - 4\} + k\{2(-1) - 5 - 3\} = 0$$

$$\{-1 + 10 - 4\} + k\{-2 - 5 - 3\} = 0$$

$$5 - 10k = 0$$

$$10k = 5 \rightarrow \mathbf{k} = \frac{1}{2}$$

25

③ k を式に戻して整理する

$k = \frac{1}{2}$ を⑤の式に代入します。

$$(x + 2y - 4) + \frac{1}{2}(2x - y - 3) = 0$$

全体に 2 を掛けて分数を消します。

$$2(x + 2y - 4) + (2x - y - 3) = 0$$

$$2x + 4y - 8 + 2x - y - 3 = 0$$

$$\mathbf{4x + 3y - 11 = 0}$$

答：$4x + 3y - 11 = 0$（$y = -\frac{4}{3}x + \frac{11}{3}$ でも正解です）

26

2　具体策Bを試してみて

- 中学校で習った解き方には熱心に取り組む
- 高校で習う解き方は変数が少なく、楽だと感じる
- でも、中学校風に解きたいです！という生徒もそれなりにいる

27

3　まとめ

- 生徒が分かっていないのでは…と推測することは大事！
- 生徒のリソース（中学数学・図形センス…）を活用する
- リソースを生かせる環境を作る
（グラフを用意する・当てやすい数値設定…）
- 「予想する→周囲と比べる→的中する」
常にワクワクできて楽しい！

28