数学教育で大切にしていること

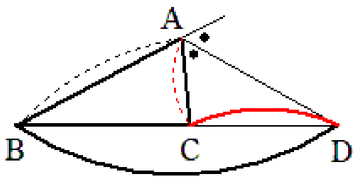
羅臼高校　戸井建

○目次

Ⅰ. 数学 A「図形と性質」の三角形の外角の二等分線と比の授業にて…

数学 A「図形と性質」の三角形の外角の二等分線と比の授業を例に私が数学教育で大事にしていることをお話したいと思います。

AB≒AC である △ABC の ∠A の外角の二等分線と辺 BC の延長との交点Dは，辺 BC を AB：AC に外分する。

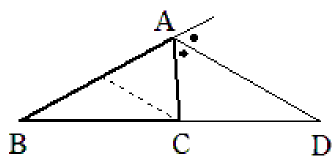


三角形の外角の二等分線と比

上記の定理について教科書にあった次のような問題を扱いました。

次の定理を証明せよ。ただし，AB＞AC の場合とする。

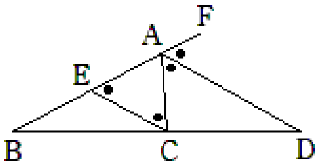
AB≒AC である △ABC の ∠A の外角の二等分線と辺 BC の延長との交点は，辺 BC を AB：AC に外分する。



教科書の練習問題

定理を証明することに慣れていなかったりする生徒もいることを考慮し、図形の中には破線の補助線を引いています。必要ならばこの補助線を使っても構わないということと、まずは自分で考えてみた上でもし難しいようであれば周りと相談しても構わないと投げかけをして問題に取り組ませました。証明を完了するまでに至ることができた生徒は多くは

なかったですが、完了に至った生徒の中の多くは先ほど示した補助線を利用しており、最終的には私の方から次のような解答を提示しました。

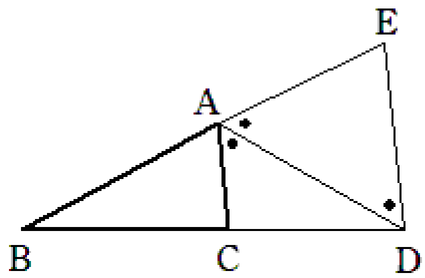


∠A の外角の二等分線と辺 BC の延長との交点を D とし，頂点 C を通り，直線 AD に平行な直線を引き，辺 AB との交点を E とする。
辺 BA の A を越える延長上に点 F をとると
∠CAD＝∠FAD(題意)…①
また，AD∥EC から
∠CAD＝∠ACE (錯角)…②
∠AEC＝∠FAD(同位角)…③
①，②，③ より，△ACE において ∠ACE＝∠AEC となるから△AEC は AE＝AC…④
の二等辺三角形である。
また，AD∥EC から BD：DC＝BA：AE…⑤が成り立つ。
④，⑤より BD：DC＝AB：AC

私が授業で提示した解答

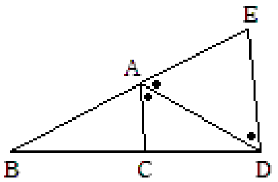
Ⅱ. 数学教育で大切にしたいこと①　～根拠を持った様々な考えを大切に～

実は証明問題を取り組ませてる間の机間指導の中で「私が解答を提示したら次はこのやり方でもできるか生徒全体の前で確かめてみよう」と思った考え方がありました。数名が相談しながらその考え方で進めており、その生徒たちはあと一歩で解答まで至らずというところでした。その考え方は以下の通りです。



辺 AB の A 側の延長の点 E を∠ADE=∠DAE となるようにとる

黒板にこの図を書いてその考え方をしていた生徒たちを中心に証明しようとするもあと一歩のところで及ばず…。ただ答えは出そうな予感はある…。授業時間もなくなり、本来予定していた演習の時間も少なくなってきたので「これ、僕の宿題にさせてほしい。この考え方で証明できたらまた紹介します。ただ、続きをやってみて答えが出たらどんなふうになったか教えて欲しい。」と言って演習の時間に切り替えました。 授業終わりその考え方を持ち帰り、自分で取り組んでみたところ以下のような解答になりました。



△ABCと△EBDにおいて

∠ABC＝∠EBD(共通)…①

また、図より∠EDA＝∠CAD(錯角)よりAC// EDが成り立つので∠BAC＝BED…②

①，②より2つの角が等しいで△ABC∽△EBDが成り立つ。

よってAB:EB＝BC:BD＝CA:DEが成り立つので

AB:EB＝BC:BD＝CA:DE＝a:bとおくと

EB:(EB－AB)＝BD:(BD－BC)＝ED:(ED－AC)＝b:(b－a)つまり

EB:EA＝BD:DC＝ED:(ED－AC)…③ が成り立つ。

さらに△EADは∠EAB＝∠EDAより二等辺三角形なのでEA＝ED…④が成り立つ。

③，④から

(AB＋EA):EA＝BD:DC＝EA:(EA－AC)…⑤より

$$EA^2 = (AB+EA)(EA-AC)$$

$$EA^2 = AB\times EA - AB\times AC + EA^2 - EA\times AC$$

$$AB\times EA = AB\times AC + EA\times AC$$

$$\frac{AB\times EA}{AC\times EA} = \frac{AC(AB+EA)}{AC\times AE}$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AB+EA}{AE}$$

AB:AC＝(AB＋EA):EA…⑥

⑤，⑥よりAB:AC＝BC:BDが成り立つ。

補助線を使わなかった生徒のアイディアを持ち帰って私が作った解答

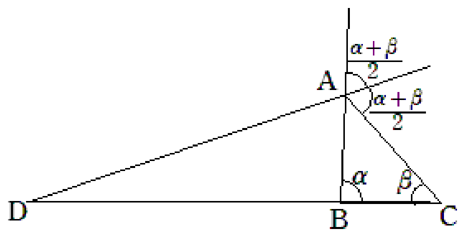
「3 以上の自然数 n に対してを $x^n+y^n=z^n$ 満たす自然数(x, y, z)の組合せは存在しない」というフェルマーの最終定理を証明するために数多の数学者たちが様々なヒントを残したり部分的に証明したりということが繋ぎ合って証明完了までに 300 年以上要してきたように「存在しないこと」を示すのは非常に難しい場合があります。それと同じく「その考え方に正解までのプロセスが存在しないこと」を示すことも難しいはずです。そこで私は日頃の授業より生徒が問題について考える上で「そのやり方だとできないかな？」といった生徒の考えやめてしまうような発言はしないようにと心がけています。なぜならそのやり方

では答えに辿り着けないことを示すのは難しいことですから。むしろ時間がかかっても正しい根拠を持ったうえで自分が考えたやり方で取り組んでいるのであればそのやり方で突き進むことが大切なのかなと思います。

Ⅲ. 数学教育で大切にしたいこと②　～問いを立てられる生徒の育成を目指す～

次の授業でこんなこと質問をしました。「前回やった問題でこの定理が証明されたと言っても良い？」という発問をしました。それに対して「これで良いと思う」という意見が多く残りの生徒は「これで良いか否かわからない」とのことだったので「定理の方は『 AB≠AC である』となっていて問題では『AB＞AC とする』と書いているけどそれでも大丈夫？」と発問すると、ある生徒が「 AB＜AC の場合が成り立つことを証明すべきだと思います」とのこと。その通りです。この視点が出てくるのはさすがですね。AB＜AC の場合はどのようになるかを下のように生徒と考えました。

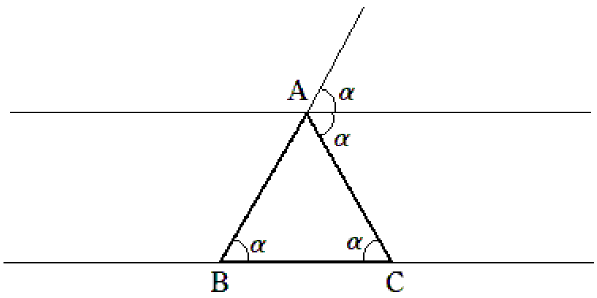
△ABCにおいて∠ABC＝α，∠ACB＝βとおく。
ここでAB＜ACのとき，αとβの大小関係を知りたい。
辺AC上にAB＝ACとなる点Eがとると，△ABEにおいて∠ABE＝∠AEBで
∠ABC＞∠ABE，∠AEB＞∠ACBより$\alpha>\beta$となる。
また、△ABC における∠Aの外角は$\alpha+\beta$なので、その角を二等分するとそれぞれの角は
$\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ となる。さらに $\alpha>\beta$ より両辺にβを加えると$\alpha+\beta>2\beta$となり，両辺を2で割ると
$\dfrac{\alpha+\beta}{2}>\beta$が成り立ち，∠Aの外角を二等分したうちの下側の角と∠ACB＝βは錯角の関係なので ∠Aの外角の2等分線は△ABCの辺BCにおけるB側を延長した直線と交わる。



AB>AC のときの図

また、今回定理が成り立たないと言われている AB=AC のとき図形はどうなるのかも生徒と一緒に考えてみました。

このとき $\triangle ABC$ は $AB=AC$ の二等辺三角形となるので $\angle ABC=\angle ACB=\alpha$ とおく。
上の説明の中にあった $\angle A$ の外角を二等分するとそれぞれの角は $\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ に $\beta=\alpha$ を代入して $\dfrac{\alpha+\alpha}{2}=\alpha$ となる。
よって $\angle ACB=\alpha$ と $\angle A$ の外角を二等分したうちの下側の角は等しく、錯角の関係なので，直線 BC と $\angle A$ の外角の二等分線は平行になり、点 D は存在しない。



AB=AC のときの図

これらの図のようになるということを生徒に発問しながら確認したうえで「AB＜AC の場合を証明してみて、もしできた人がいたら教えてほしい」ということを伝えました。今回の授業では AB と AC の長さによって図がどのようになるかを生徒たちとともに導きましたが、今後生徒たちが様々な経験を通して「これって問題としては正解で構わないと思うけど定理そのものの証明にはまだ至っていないのでは？」と疑いの視点を持ち、「では AB＜AC の場合はどうなるのだろう？」とか「そもそも『AB=AC のときに定理が成り立つ』って書いているけど AB=AC の場合って図形はどうなるのだろう？」というような問いを立て、その問いを解決しようと挑戦するような生徒を育てていきたいですね。

Ⅳ. 生徒の変化

先日私のところにこんな質問をしてきた生徒たちがいました。「この問題、授業で扱っていないけどやってみたいです！！」とのこと。なんと素晴らしい心意気でしょう。「君の中にある数学の世界の中でどういうことが成り立ったらこの問題の答えが求まると思う？」、「じゃあ、それが成り立つためにはどんなことが言えたら良い？」といった質問をしながらその生徒たちは「自分の中にある数学の世界」の中でその問題を解いていき、正解まで導くことが出来、その過程で新たな定理の発見もしました。その定理は高校数学の教科書でこの後出てくる内容ではありますが、自分の力で「自分の中にある数学の世界」を広げることに喜びと達成感を感じておりました。こんなふうに「数学って面白い！！」と思える生徒が増えていくような工夫や仕掛けの引き出しを私自身どんどん増やしていきたいですね。

Ⅴ. まとめ

これまで述べてきた生徒を育てるためには生徒自身が「数学って面白い！！」と思えるような教員側の工夫や仕掛けができることが大切なのかなと思います。そのための大前提としてまずは私自身がこれからも「数学を楽しむ」ことが大切なのかなと思います。私は数学における一番の楽しさは、「自分中にある数学の世界」にあることを使って「自分中にある数学の世界」を広げられることかなと思います。生徒たちが問いを立てられたとしてその問いの解決の過程の中でその面白さを感じてくれたらなと思います。今回の内容を授業で扱ったとき，三角形における辺の長さと対角の関係をまだ扱っておりませんでした。しかし，先述の生徒とのやりとりの中で生徒たちは「自分の中にある数学の世界」の中で三角形における辺の長さと対角の関係を導いたうえでこのような図になることを確認しました。立てた問いを解決しようとしたときに今回のように新たなことがわかると解決を目指せそうということがありますが、その新たなことも「自分の中にある数学の世界」を広げて解決し、それを用いて問いの解決を目指せば良いのです。確かに「自分の中にある数学の世界」が広がっても、その広がった世界の大方はもう既に誰かが発見していることである場合が多いです。しかしここで大事なのはあくまで「自分の中にある数学の世界」を広げていくことだと私は思います。数学は定義を出発点として、そこから定理や公式が生まれ、新たな数学が創られることで発展してきました。そしてそれが数学の分野のみならず科学技術の進化に大きく貢献してきました。数学教育において公式や定理を理解し活用できるようになることはもちろん重要です。しかしそれ以上に「自分の中にある数学の世界」を使って新たな数学を創り出せたり、規則性を見抜いたりすることで「こんなことができるのでは？」や「こんなことが成り立ちそう」という予想をして公式や定理を導ける力を育てることが数学教育として目指すべき姿の１つではないかなと私は思います。