

PK 戦は先攻有利と言えるのか
～羅臼高校生がサッカー選手の永遠の疑問を確率的に検証～

羅臼高校 戸井建

○目次

- I. PK 戦とは？
- II. 羅臼高校応用数学の授業で立てた問い
- III. キック成功率 8 割としたとき先攻が勝利する確率は？
- IV. キック成功率 8 割のときの結果を踏まえて新たな問いの設定
- V. 今後の展望
- VI. この続きを遊んでみた

I. PK 戦とは？

PK 戦とはサッカーやフットサルの試合において時間内に勝敗が決まらなかった場合でかつ試合の勝敗を決する必要がある際に、行われるタイブレーク方式です。両チーム交互に 5 人ずつキックを行い、ゴール数の多いチームが勝者となります。先攻か後攻かをコイントスで決め、交互にキックをするのですが、両チーム 5 本のキックを行わずとも途中でどちらかの勝利が確定した時点で打ち切りとなります。なお、5 本のキックを行った際にそれでも勝敗が決しない場合はサドンデス方式というやり方で勝敗が決するまでキックを行います。

II. 応用数学の授業で生徒が立てた問い

羅臼高校では高校 3 年生で学校設定科目に応用数学という科目があり、この科目では 1・2 年生で扱わなかった研究や発展の内容を扱ったり、ときにはこれまでで扱ったことを用いて高校数学の教科書には載っていないような公式を作ったり、数学を用いた探究学習を行ったりしています。この授業における探究学習の一環で生徒が立てた問いは「PK 戦では先攻が有利なのではないか？」というものです。この問いを立てた背景としては PK 戦において先攻と後攻で蹴る回数が先攻のほうが多い場合があるためです。例えば先攻が最初の 4 本のキックをすべて成功させ、後攻が 4 本目までで 3 回成功、1 回失敗となり、最後先攻が 5 本目のキックを成功させた場合、その時点で 5-3 のスコアで先攻の勝利となります。その場合は後攻が最後のキックをする前に勝敗が決まっており、結果的に先攻は 5 本キックを行い、後攻は 4 本キックを行ったことになります。

III. 1 人の選手のキックが成功する確率を 8 割としたとき先攻が勝利する確率は？

生徒が立てた問いからこんな問題をやってみることにしました。

サッカーのPK戦において、先攻が勝つ確率を求めよ。ただし、選手全員が1回のキックで成功する確率は8割とする。

この確率は言い換えると「先攻が1-0で勝つまたは2-0で勝つまたは2-1で勝つまたは3-0で勝つまたは3-1で勝つまたは3-2で勝つまたは4-1で勝つまたは4-2で勝つまたは4-3で勝つまたは5-3で勝つまたは5-4で勝つまたは5本蹴って同点（0-0または1-1または2-2または3-3または4-4または5-5）かつサドンデスで先攻が勝つ確率」と言えます。問題から1回のPKで成功する確率が $\frac{4}{5}$ なので失敗する確率は $\frac{1}{5}$ となります。まずは5本目まででPK戦の決着がつく場合についてそれぞれのスコアに対して先攻が勝つ確率を考えます。例えば4-2で先攻が勝つ場合は下の表のようなパターンが考えられます。ただし、下の表においてキックの成功は「○」、失敗は「×」、蹴っていないところは「-」と記載します。

	1回目	2回目	3回目	4回目	5回目
先攻	○	○	○	○	-
後攻	○	○	×	×	-

上の表のように4回目までに先攻が4点決め、後攻2点決めた場合、キックは4回目で打ち切りなのでその確率は

$$\left(\frac{4}{5}\right)^4 \times {}_4C_2 \left(\frac{4}{5}\right)^2 \left(\frac{1}{5}\right)^2 \text{ となる。}$$

	1回目	2回目	3回目	4回目	5回目
先攻	○	○	×	○	○
後攻	○	○	×	×	-

また上の表のように4回目までに先攻が3点決め、後攻が2点決めたあとに先攻が5本目を決めた場合、キックはそこで打ち切りなのでこの場合先攻が勝つ確率は ${}_4C_3 \left(\frac{4}{5}\right)^3 \left(\frac{1}{5}\right) \times \frac{4}{5} \times {}_4C_2 \left(\frac{4}{5}\right)^2 \left(\frac{1}{5}\right)^2$ となる。

$$\text{よって4-2で先攻が勝つ確率は} \left(\frac{4}{5}\right)^4 \times {}_4C_2 \left(\frac{4}{5}\right)^2 \left(\frac{1}{5}\right)^2 + {}_4C_3 \left(\frac{4}{5}\right)^3 \left(\frac{1}{5}\right) \times \frac{4}{5} \times {}_4C_2 \left(\frac{4}{5}\right)^2 \left(\frac{1}{5}\right)^2$$

4-2で先攻が勝つ確率

同様に考えていくとその他のそれぞれのスコアに対する確率は次のようになります。

$$1-0 \rightarrow {}_5C_1 \left(\frac{4}{5}\right) \left(\frac{1}{5}\right)^2$$

$$2-0 \rightarrow {}_4C_2 \left(\frac{4}{5}\right)^2 \left(\frac{1}{5}\right)^6 + {}_4C_1 \left(\frac{4}{5}\right) \left(\frac{1}{5}\right)^7$$

$$3-0 \rightarrow {}_3C_2 \left(\frac{4}{5}\right)^3 \left(\frac{1}{5}\right)^4 + \left(\frac{4}{5}\right)^3 \left(\frac{1}{5}\right)^3$$

$$2-1 \rightarrow {}_5C_2 \cdot {}_4C_1 \left(\frac{4}{5}\right)^3 \left(\frac{1}{5}\right)^7$$

$$3-1 \rightarrow {}_4C_3 \cdot {}_3C_1 \left(\frac{4}{5}\right)^4 \left(\frac{1}{5}\right)^4 + {}_4C_2 \cdot {}_4C_1 \left(\frac{4}{5}\right)^4 \left(\frac{1}{5}\right)^5$$

$$3-2 \rightarrow {}_5C_3 \cdot {}_4C_2 \left(\frac{4}{5}\right)^5 \left(\frac{1}{5}\right)^5$$

$$4-1 \rightarrow {}_3C_1 \left(\frac{4}{5}\right)^5 \left(\frac{1}{5}\right)^2$$

$$4-3 \rightarrow {}_5C_4 \cdot {}_4C_3 \left(\frac{4}{5}\right)^7 \left(\frac{1}{5}\right)^3$$

$$5-3 \rightarrow {}_4C_3 \left(\frac{4}{5}\right)^8 \left(\frac{1}{5}\right)$$

$$5-4 \rightarrow \left(\frac{4}{5}\right)^9 \left(\frac{1}{5}\right)$$

4-2 以外のそれぞれのスコアで先攻が勝つ確率

次にサドンデスで先攻が勝つ確率に関して詳しく書きます。PK 戦は 5 本目が終わった段階で同点になった場合にサドンデスに突入となりますので下に同点になる場合の確率をそれぞれ記載します。

$$0-0 \rightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^{10}$$

$$1-1 \rightarrow {}_5C_1 \cdot {}_5C_1 \left(\frac{4}{5}\right)^2 \left(\frac{1}{5}\right)^8$$

$$2-2 \rightarrow {}_5C_2 \cdot {}_5C_2 \left(\frac{4}{5}\right)^4 \left(\frac{1}{5}\right)^6$$

$$3-3 \rightarrow {}_5C_3 \cdot {}_5C_3 \left(\frac{4}{5}\right)^6 \left(\frac{1}{5}\right)^4$$

$$4-4 \rightarrow {}_5C_4 \cdot {}_5C_4 \left(\frac{4}{5}\right)^8 \left(\frac{1}{5}\right)^2$$

$$5-5 \rightarrow \left(\frac{4}{5}\right)^{10}$$

同点のそれぞれのスコアごとの確率

サドンデスは先攻後攻が 1 本ずつ蹴って勝敗が決まった時点で終了ということですが、そこで先攻が勝つ確率は「先攻がサドンデス 1 本目で勝利を決めるまたはサドンデス 2 本

目で勝利を決めるまたはサドンデス 3 本目で勝利を決めるまたは・・・またはサドンデス n 本目で勝利を決める確率」と言えます。サドンデス n 本目で先攻が勝つ確率は n 本目 ($n \geq 2$ を満たす自然数) までキックが続くとき、 $1 \leq k \leq n-1$ を満たすすべての自然数 k について k 本目は先攻後攻がともに成功またはともに失敗し、 n 本目で先攻がキックを成功させて後攻が失敗する確率なので

$$\begin{aligned}
& \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5} + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5} \left\{ \left(\frac{4}{5} \right)^2 + \left(\frac{1}{5} \right)^2 \right\} + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5} \left\{ \left(\frac{4}{5} \right)^4 + {}_2C_1 \left(\frac{4}{5} \right)^2 \left(\frac{1}{5} \right)^2 + \left(\frac{1}{5} \right)^4 \right\} \\
& + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5} \left\{ \left(\frac{4}{5} \right)^6 + {}_3C_1 \left(\frac{4}{5} \right)^4 \left(\frac{1}{5} \right)^2 + {}_3C_2 \left(\frac{4}{5} \right)^2 \left(\frac{1}{5} \right)^4 + \left(\frac{1}{5} \right)^6 \right\} + \cdots \\
& + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5} \left\{ \left(\frac{4}{5} \right)^{2n} + {}_nC_1 \left(\frac{4}{5} \right)^{2n-2} \left(\frac{1}{5} \right)^2 + {}_nC_2 \left(\frac{4}{5} \right)^{2n-4} \left(\frac{1}{5} \right)^4 + \cdots + \left(\frac{1}{5} \right)^{2n} \right\} + \cdots \\
& = \frac{4}{25} + \frac{4}{25} \left(\frac{16}{25} + \frac{1}{25} \right) + \frac{4}{25} \left\{ \left(\frac{16}{25} \right)^2 + 2 \left(\frac{16}{25} \right) \left(\frac{1}{25} \right) + \left(\frac{1}{25} \right)^2 \right\} \\
& + \frac{4}{25} \left\{ \left(\frac{16}{25} \right)^3 + 3 \left(\frac{16}{25} \right)^2 \left(\frac{1}{25} \right) + 3 \left(\frac{16}{25} \right) \left(\frac{1}{25} \right)^2 + \left(\frac{1}{25} \right)^3 \right\} + \cdots \\
& + \frac{4}{25} \left\{ \left(\frac{16}{25} \right)^n + {}_nC_1 \left(\frac{16}{25} \right)^{n-1} \left(\frac{1}{25} \right) + {}_nC_2 \left(\frac{16}{25} \right)^{n-2} \left(\frac{1}{25} \right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{25} \right)^n \right\} + \cdots \\
& = \frac{4}{25} \left\{ \left(\frac{17}{25} \right)^0 + \left(\frac{17}{25} \right)^1 + \left(\frac{17}{25} \right)^2 + \left(\frac{17}{25} \right)^3 + \cdots + \left(\frac{17}{25} \right)^n + \cdots \right\} \\
& = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{25} \left(\frac{17}{25} \right)^{k-1} \\
& = \frac{\frac{4}{25}}{1 - \frac{17}{25}} \\
& = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

サドンデスで先攻が勝つ確率

以上から PK 戦で先攻が勝つ確率は

$$\begin{aligned}
& {}_5C_1 \left(\frac{4}{5} \right) \left(\frac{1}{5} \right)^9 + {}_4C_2 \left(\frac{4}{5} \right)^2 \left(\frac{1}{5} \right)^6 + {}_4C_1 \left(\frac{4}{5} \right)^2 \left(\frac{1}{5} \right)^7 + {}_3C_2 \left(\frac{4}{5} \right)^3 \left(\frac{1}{5} \right)^4 + \left(\frac{4}{5} \right)^3 \left(\frac{1}{5} \right)^3 + {}_5C_2 \cdot {}_4C_1 \left(\frac{4}{5} \right)^3 \left(\frac{1}{5} \right)^7 \\
& + {}_4C_3 \cdot {}_3C_1 \left(\frac{4}{5} \right)^4 \left(\frac{1}{5} \right)^4 + {}_4C_2 \cdot {}_4C_1 \left(\frac{4}{5} \right)^4 \left(\frac{1}{5} \right)^5 + {}_5C_3 \cdot {}_4C_2 \left(\frac{4}{5} \right)^5 \left(\frac{1}{5} \right)^5 + {}_3C_1 \left(\frac{4}{5} \right)^5 \left(\frac{1}{5} \right)^2 \\
& + {}_3C_2 \left(\frac{4}{5} \right)^6 \left(\frac{1}{5} \right)^2 + {}_4C_3 \cdot {}_4C_2 \left(\frac{4}{5} \right)^4 \left(\frac{1}{5} \right)^5 + {}_5C_4 \cdot {}_4C_3 \left(\frac{4}{5} \right)^7 \left(\frac{1}{5} \right)^3 + {}_4C_3 \left(\frac{4}{5} \right)^8 \left(\frac{1}{5} \right) + \left(\frac{4}{5} \right)^9 \left(\frac{1}{5} \right) \\
& + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{5} \right)^{10} + {}_5C_1 \cdot {}_5C_1 \left(\frac{4}{5} \right)^2 \left(\frac{1}{5} \right)^8 + {}_5C_2 \cdot {}_5C_2 \left(\frac{4}{5} \right)^4 \left(\frac{1}{5} \right)^6 + {}_5C_3 \cdot {}_5C_3 \left(\frac{4}{5} \right)^6 \left(\frac{1}{5} \right)^4 + {}_5C_4 \cdot {}_5C_4 \left(\frac{4}{5} \right)^8 \left(\frac{1}{5} \right)^2 + \left(\frac{4}{5} \right)^{10} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{4}{1953125} + \frac{544}{1953125} + \frac{512}{78125} + \frac{512}{1953125} + \frac{21504}{1953125} + \frac{12288}{1953125} + \frac{3072}{78125} + \frac{159744}{1953125} + \frac{65536}{1953125} \\
&\quad + \frac{262144}{1953125} + \frac{262144}{9765625} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{9765625} + \frac{16}{390625} + \frac{1024}{390625} + \frac{16384}{390625} + \frac{65536}{390625} + \frac{1048576}{9765625} \right) \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

PK 戦で 1 回のキックの成功率が 8 割のときに先攻が勝つ確率

IV. キック成功率 8 割のときの結果を踏まえて新たな問いの設定

この結果を踏まえて「1 回のキックで成功する確率が同じという前提のもと PK 戦で勝つ確率は先攻後攻どちらも $\frac{1}{2}$ になるのではないか？」ということを新たな問いとして設定しました。1 回のキックで成功する確率を $p(0 < p < 1)$ として一般化して考えようと思います。つまり PK 戦に参加するキッカー全員のキックが成功する確率を p 、失敗する確率を q (ただし $q = 1 - p$) として次は検証してみようと思います。先ほどの式において成功する確率と失敗する確率をそれぞれ p, q と置き換えて計算する前に、そもそもサドンデスで勝つ確率が 1 回の成功率を p としたときにも $\frac{1}{2}$ となるのかを確認してみます。2 つ前に出ている式変形の中で成功する確率と失敗する確率をそれぞれ p, q と置き換えると

$$\begin{aligned}
& pq + pq(p^2 + q^2) + pq(p^4 + 2p^2q^2 + q^4) + pq(p^6 + 3p^4q^2 + 3p^2q^4 + q^6) + pq(p^{2n} + p^{2n-2}q^2 + p^{2n-4}q^4 + \dots + q^{2n}) \\
&= pq[(p^2 + q^2)^0 + (p^2 + q^2)^1 + (p^2 + q^2)^2 + \dots + (p^2 + q^2)^n + \dots] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} pq(p^2 + q^2)^k \\
&= \frac{pq}{1 - (p^2 + q^2)} \quad (\because p^2 + q^2 = (p + q)^2 - 2pq = 1 - 2pq < 1) \\
&= \frac{pq}{1 - (1 - 2pq)} \\
&= \frac{pq}{2pq} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

サドンデスで先攻が勝つ確率

上記より 1 回のキックで成功する確率を p としたときもサドンデスで先攻が勝つ確率は $\frac{1}{2}$ となることがわかりました。それでは実際にこれを利用して 1 回のキックで成功する確率が同じという前提のもとであれば PK 戦で勝つ確率は先攻後攻どちらも $\frac{1}{2}$ になるかを確かめてみようと思います。

$$\begin{aligned}
& {}_5C_1 p q^9 + {}_4C_2 p^2 q^6 + {}_4C_1 p^2 q^7 + {}_3C_2 p^3 q^4 + p^3 q^3 + {}_5C_2 \cdot {}_4C_1 p^3 q^7 + {}_4C_3 \cdot {}_3C_1 p^4 q^4 + {}_4C_2 \cdot {}_4C_1 p^4 q^5 + {}_5C_3 \cdot {}_4C_2 p^5 q^5 \\
& + {}_3C_1 p^5 q^2 + {}_4C_2 p^6 q^2 + {}_4C_3 \cdot {}_4C_2 p^6 q^3 + {}_5C_4 \cdot {}_4C_3 p^7 q^3 + {}_4C_3 p^8 q + p^9 q \\
& + \frac{1}{2} (q^{10} + {}_5C_1 \cdot {}_5C_1 p^2 q^8 + {}_5C_1 \cdot {}_5C_1 p^2 q^8 + {}_5C_2 \cdot {}_5C_2 p^4 q^6 + {}_5C_3 \cdot {}_5C_3 p^6 q^4 + {}_5C_4 \cdot {}_5C_4 p^8 q^2 + p^{10}) \\
& = 5p q^9 + 6p^2 q^6 + 4p^2 q^7 + 3p^3 q^4 + p^3 q^3 + 40p^3 q^7 + 12p^4 q^4 + 24p^4 q^5 + 60p^5 q^5 + 3p^5 q^2 + 6p^6 q^2 + 24p^6 q^3 \\
& + 20p^7 q^3 + 4p^8 q + p^9 q + \frac{1}{2} (q^{10} + 25p^2 q^8 + 100p^4 q^6 + 100p^6 q^4 + 25p^8 q^2 + p^{10}) \\
& = (1-p-q) \left\{ \frac{1}{2} p^9 + \left(\frac{1}{2} q + \frac{1}{2} \right) p^8 + \left(12q^2 + 4q + \frac{1}{2} \right) p^7 + \left(8q^3 + 8q^2 + \frac{7}{2} q + \frac{1}{2} \right) p^6 \right. \\
& + \left(42q^4 + 24q^3 + \frac{15}{2} q^2 + 3q + \frac{1}{2} \right) p^5 + \left(18q^5 + 18q^4 + \frac{33}{2} q^3 + \frac{15}{2} q^2 + \frac{5}{2} q + \frac{1}{2} \right) p^4 \\
& + \left(32q^6 + 24q^5 + \frac{27}{2} q^4 + 9q^3 + 5q^2 + 2q + \frac{1}{2} \right) p^3 + \left(8q^7 + 8q^6 + \frac{21}{2} q^5 + \frac{15}{2} q^4 + 5q^3 + 3q^2 + \frac{3}{2} q + \frac{1}{2} \right) p^2 \\
& + \left(\frac{9}{2} q^8 + 4q^7 + \frac{7}{2} q^6 + 3q^5 + \frac{5}{2} q^4 + 2q^3 + \frac{3}{2} q^2 + q + \frac{1}{2} \right) p \\
& + \left. \left(\frac{1}{2} p^9 + \frac{1}{2} q^6 + \frac{1}{2} q^7 + \frac{1}{2} q^6 + \frac{1}{2} q^5 + \frac{1}{2} q^4 + \frac{1}{2} q^3 + \frac{1}{2} q^2 + \frac{1}{2} q + \frac{1}{2} \right) \right\} + \frac{1}{2} \\
& = \frac{1}{2} \quad (\because 1-p-q=0)
\end{aligned}$$

1回のキックが成功する確率を p としたときの先攻が勝つ確率

上の式から1回のキックで成功する確率が同じという前提のもとであればPK戦で勝つ確率は先攻後攻どちらも $\frac{1}{2}$ になるということがわかりました。

V. 今後の展望

この授業は昨年度の3年生を対象に行ったのですが、この授業の最後に生徒に「もしこの授業が続いたら今回の結果を踏まえてどんな風にこのあと考察を深めたい？」という質問を投げかけました。そこで出てきたのは

- ・ある大会（例えば FIFA ワールドカップ や 全国高校サッカー選手権大会）における歴代のPK戦の勝敗データがすべて得られたと仮定したとき、PK戦の勝敗に関して、統計学的に有意な先攻・後攻の有利不利が存在するか否か。
- ・心理的な面においてプレッシャーはPKのキック成功率にどの程度影響するか。
- ・PK戦において何番目のキッカーが最も勝敗に影響を与えるのか(先ほどの式から検証できそう)。

上記の側面からもPK戦について考察してみるとまた新たな発見や新たに深掘りをしたくなるような問いが発見できるかもしれないですね。

VI. この続きを遊んでみた

私はこの結果を踏まえて自分の中で先ほどの式を変形してさらに遊んでみたくなり、PK

戦が5回キックというルールではなく n 回キックというルールにしたときでも $\frac{1}{2}$ となることを証明できるのではないかと疑問を持ちました。ただ一般化しようとするときさらに先ほどの式が複雑になってしまうような、どうしたらよいかな？と考えていたら次の方法を思いつきました。現行のルールでは途中で勝敗が決まると途中で打ち切りとなっていますが、そのまま5本続けても勝敗の結果が変わらないとしたら打ち切った後はキックを成功しても失敗しても良いということになる。つまり下のような式変形ができると考えました。具体的には各項に着目したときに p と q の指数に着目したときに指数の和が10未満の項が意味しているのは勝敗が決定してPK戦が打ち切られているということなので10未満の自然数 k について p と q の指数の和が k となっている項に $(p+q)^{10-k}$ を掛けることができます($p+q=1$ なので)。

$$\begin{aligned}
& {}_5C_1 p q^9 + {}_4C_2 p^2 q^8 + {}_4C_1 p^2 q^7 + {}_3C_2 p^3 q^4 + p^3 q^3 + {}_5C_2 \cdot {}_4C_1 p^3 q^7 + {}_4C_3 \cdot {}_3C_1 p^4 q^4 + {}_4C_2 \cdot {}_4C_1 p^4 q^5 + {}_5C_3 \cdot {}_4C_2 p^5 q^5 \\
& + {}_3C_1 p^5 q^2 + {}_4C_2 p^6 q^2 + {}_4C_3 \cdot {}_4C_2 p^6 q^3 + {}_5C_4 \cdot {}_4C_3 p^7 q^3 + {}_4C_3 p^8 q + p^9 q \\
& + \frac{1}{2}(q^{10} + {}_5C_1 \cdot {}_5C_1 p^2 q^8 + {}_5C_1 \cdot {}_5C_1 p^2 q^8 + {}_5C_2 \cdot {}_5C_2 p^4 q^6 + {}_5C_3 \cdot {}_5C_3 p^6 q^4 + {}_5C_4 \cdot {}_5C_4 p^8 q^2 + p^{10}) \\
& = {}_5C_1 p q^9 + {}_4C_2 p^2 q^8 (p+q)^2 + {}_4C_1 p^2 q^7 (p+q) + {}_3C_2 p^3 q^4 (p+q)^3 + p^3 q^3 (p+q)^4 + {}_5C_2 \cdot {}_4C_1 p^3 q^7 \\
& + {}_4C_3 \cdot {}_3C_1 p^4 q^4 (p+q)^2 + {}_4C_2 \cdot {}_4C_1 p^4 q^5 (p+q) + {}_5C_3 \cdot {}_4C_2 p^5 q^5 \\
& + {}_3C_1 p^5 q^2 (p+q)^3 + {}_4C_2 p^6 q^2 (p+q)^2 + {}_4C_3 \cdot {}_4C_2 p^6 q^3 (p+q) + {}_5C_4 \cdot {}_4C_3 p^7 q^3 + {}_4C_3 p^8 q (p+q) + p^9 q \\
& + \frac{1}{2}(q^{10} + {}_5C_1 \cdot {}_5C_1 p^2 q^8 + {}_5C_1 \cdot {}_5C_1 p^2 q^8 + {}_5C_2 \cdot {}_5C_2 p^4 q^6 + {}_5C_3 \cdot {}_5C_3 p^6 q^4 + {}_5C_4 \cdot {}_5C_4 p^8 q^2 + p^{10}) \quad (\because p+q=1) \\
& = \frac{1}{2}(p^{10} + 10p^9q + 45p^8q^2 + 120p^7q^3 + 210p^6q^4 + 252p^5q^5 + 210p^4q^6 + 120p^3q^7 + 45p^2q^8 + 10pq^9 + q^{10}) \\
& = \frac{1}{2}({}_{10}C_0 p^{10} + {}_{10}C_1 p^9q + {}_{10}C_2 p^8q^2 + {}_{10}C_3 p^7q^3 + {}_{10}C_4 p^6q^4 + {}_{10}C_5 p^5q^5 + {}_{10}C_6 p^4q^6 + {}_{10}C_7 p^3q^7 \\
& + {}_{10}C_8 p^2q^8 + {}_{10}C_9 pq^9 + {}_{10}C_{10} q^{10}) \\
& = \frac{1}{2}(p+q)^{10} \\
& = \frac{1}{2} \quad (\because p+q=1)
\end{aligned}$$

生徒が変形した式を別の視点からアプローチした

上記のように前のページでかなり複雑だった式が変形してみると $\frac{1}{2}(p+q)^{10}$ とかなり簡単な形になりました。このことから仮にPK戦が現状の5回キックを行うというルールから n 回キックを行うというルールになった場合でも先攻が勝利する確率が $\frac{1}{2}(p+q)^{2n} = \frac{1}{2}$ と変形できるのではないかと予想ができた。そこの証明はまだ出来ていませんが、もし出来た際には羅臼高校公式noteに記事を投稿したいと思っています。参考までに実際に生

徒が投稿した記事の QR コードも貼っておきます。



羅臼高校公式 note

PK 戦における先攻後攻の有利不利の確率的検証を羅高生がやってみた！！

～サッカー選手の永遠の疑問を数学的に解説～⚽

今回は生徒が頑張ってくれた式変形を別の視点からアプローチして私自身も遊んでみました。生徒の探究活動を支援するのはとても大事ですが、我々教員も数学を探究し続けられたら良いですね。