

137回数実研レポート 「モデル化のススメ」

横山 徹

【はじめに】

平成12年から平成15年にかけての授業では「総合的な学習の時間」の導入で生徒にテーマを設定させるため、授業で課題を提示して「テーマの種」をまく必要がありました。すでに25年以上が経過して学習指導要領も改定され、当時「数学B」で使用した教材（別添資料1）にファジ理論などを追加して改訂しました。

§1 ファジ集合



最初にファジ集合について説明しましょう。「お金持ちの集まり」と聞かれたら皆さんはどう答えますか？



曖昧な表現ですね。一般的には純金融資産が1億円以上あれば富裕層で、5億円以上は超富裕層と言われていますから純金融資産が1億円以上ある人ではないでしょうか？



1億あってもお金持ちだと思わない人もいます。高校生には100万円でも大金です。

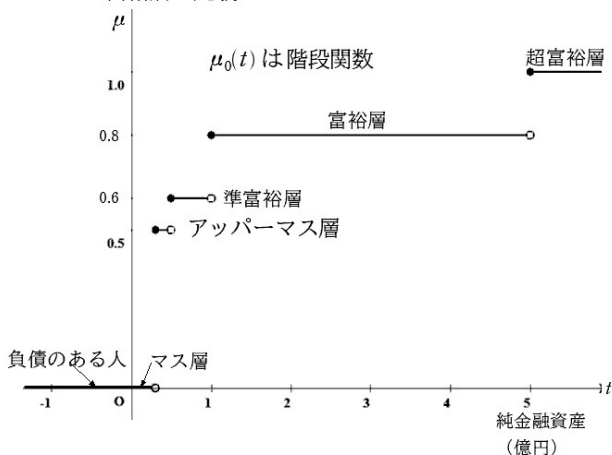


「お金持ち」という集まりを集合のように「属する」「属さない」で判断するのではなく純金融資産の金額で「お金持ちの程度」を0から1の間の数値で表現し、1に近いほど「お金持ち」の度合いが高いと考えることにしましょう。純金融資産の区分として

0～3000万未満	マス層
3000万～5000万未満	アッパーマス層
5000万～1億未満	準富裕層
1億～5億未満	富裕層
5億以上	超富裕層

と定義されるので、「超富裕層」を1、「富裕層」を0.8、「準富裕層」を0.6、「アッパーマス層」を0.5、「マス層」や「負債を抱える人」を0で表すと次のように表現できます。

グラフ1 富裕層の定義

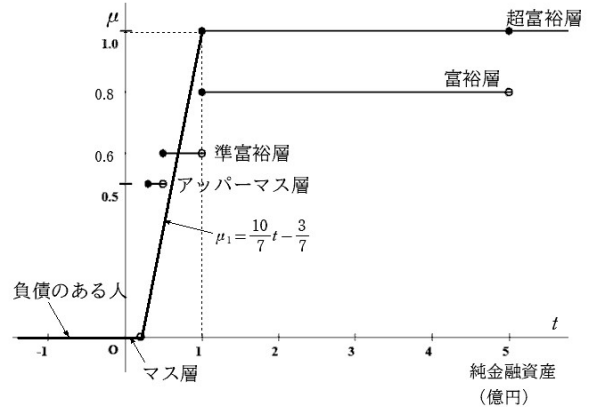


純金融資産0.3億と1億の間を直線で結び μ_1 を

$$\mu_1(t) = \begin{cases} 0 & t < 0.3 \\ \frac{10}{7}t - \frac{3}{7} & 0.3 \leq t < 1 \\ 1 & 1 \leq t \end{cases}$$

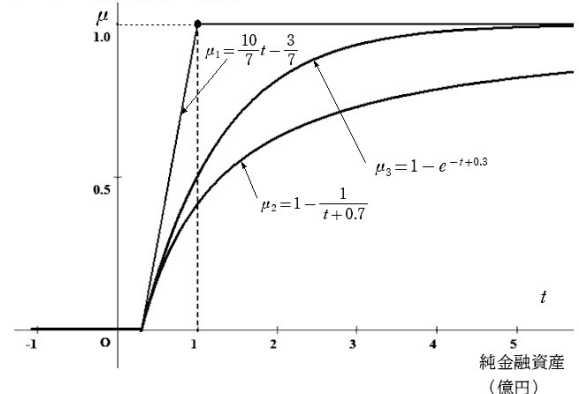
にすると富裕層はすべてお金持ちで、準富裕層やアッパーマス層でのギャップはなくなりますよ。

グラフ2 お金持ちの度合



でも1億を超えた人は一律に同じ程度の「お金持ち」になるので $t \geq 0.3$ の範囲では $\mu = 1$ が漸近線になるような関数を使用してはどうでしょうか？

グラフ3 お金持ちの度合2



それらしくなりましたね。集合の要素に0から1の数値を対応させる関数をメンバーシップ関数、メンバーシップ関数が定義された要素の集まりをファジ集合といいます。

X を住民全体の集合とし、 t を住民の純金融資産とすると $t: X \rightarrow R$ は集合上で定義された関数になり、 μ をこれまでに定義してきた関数 $\mu: R \rightarrow [0,1]$ と考えれば $x \in X$ に対して $\mu(t(x))$ は集合 X 上で定義されたメンバーシップ関数になります。混乱しなければ $\mu(t(x))$ を略して $\mu(x): X \rightarrow [0,1]$ で表すことにしましょう。

A のメンバーシップ関数を μ_A で表すこともあります。またファジ集合 A も $A = \{x, \mu_A(x)\} \quad x \in X$ で表すことがあります。



0.999億の資産を持つ人はほとんど富裕層と考えてもよさそうなのに0.5億の人と同じ準富裕層なので数値は0.6ですよ。

【レベル集合】



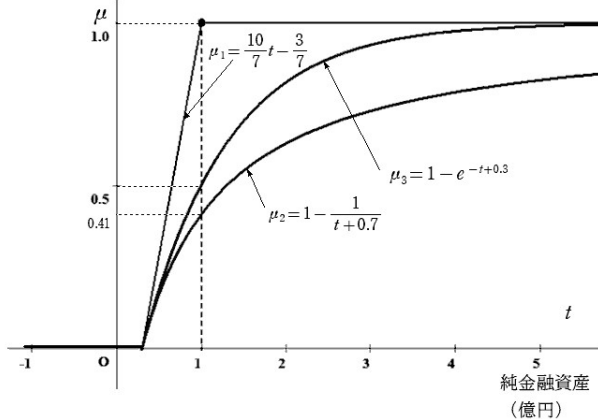
ファジィ集合 A とそのメンバーシップ関数 μ_A
および実数 $\alpha \in [0, 1]$ に対して

$$A_\alpha = \{x \mid \mu_A(x) \geq \alpha, x \in A\}$$

を A の α -レベル集合 といいます。

純金融資産で考えた4つのメンバーシップ関数 μ_i に対して、
1億円以上の純金融資産を持つ人の集合を α -レベル集合 で表
すと μ_0 では $\alpha=0.8$ ですが、 μ_1 では $\alpha=1$ 、 μ_2 では $\alpha=0.41$ 、
 μ_3 では $\alpha=0.5$ になります。

グラフ4 純金融資産1億円以上のレベル集合



§2 お見合い問題

アンケート調査で自分と一致した項目の割合を μ とします。す
べての項目が一致していれば $\mu=1$ で、すべて不一致なら $\mu=0$
です。 μ は $0 \leq \mu \leq 1$ の値を取るなのでメンバーシップ関数になり、
アンケートに参加した人の集まりをファジィ集合として定義する
ことができます。 μ は相性の良さを表すものとして考える
ことができます。

【例題1】

お見合いの候補者を10人紹介してもらうことになり、その中
から書類選考で1人だけをお見合い相手に選びます。判断材料は
事前のアンケートで一致した項目の割合 μ だけです。

条件

- (1) アンケート調査で自分と一致した項目の割合が記載された
カードを1枚ずつ閲覧し、次の候補者のカードを閲覧した時
点で前の候補者とお見合いすることはできなくなります。
- (2) あなたが1人選んだ時点で残りのカードを見ることはでき
なくなります。
- (3) 候補者10人は全員あなたとお見合いを希望しているの
で、お見合いそのものは断られることはありません。

以上の条件で、できるだけ相性の良い人を書類選考するため
にはどうしたら良いのでしょうか。いろいろな戦略を考えてシミュ
レーションをしてみましょう。例えば次の「速決型」ではどうなる
のでしょうか？

「速決型戦略」

- | | |
|-------|-------------------|
| 1人目 | 見送る |
| 2～4人目 | それまでの最下位でなければ決める。 |
| 5、6人目 | それまでの4位以内なら決める。 |
| 7、8人目 | それまでの5位以内なら決める。 |
| 9人目 | それまでの6位以内なら決める。 |
| 10人目 | 必ず決める。 |



いろいろな戦略があるのは分かりますが、どうや
ってシミュレーションするのでしょうか？



[0,1] の間の数値をランダムに発生させて計算させ
ればよいでしょうが、プログラミングが必要ですね？



表計算ソフトには一様乱数やif文の機能もあります
から基本的な関数を覚えるだけでシミュレーションで
きます。使用する主な関数を紹介しましょう。

- RAND 0から1の間の数値をランダムに表示します。
RANK 並んだ数字に順位をつけます
MIN 並んだ数字の中で最小の値を表示します。
MAX 並んだ数字の中で最大の値を表示します
IF 条件にしたがって表示内容を選択します。

【練習1】「3番目に大きい数を求める」

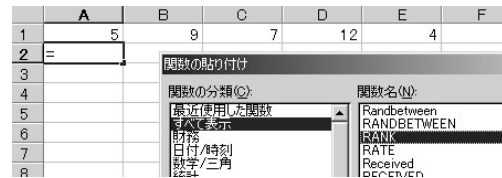
5, 9, 7, 12, 4の数値が並んでします。3番目に大きな数
を見つけて結果を表示させてみましょう。

図5

	A	B	C	D	E	F
1	5	9	7	12	4	
2						
3						
4						
5						

- (1) 図5で、A2のセルにカーソルを合わせます。
- (2) 「RANK」という関数を搜します。(図6)

図6



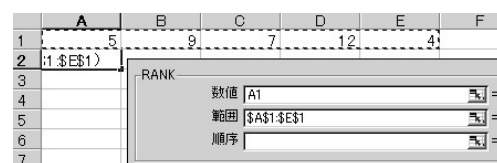
- (3) 図6で「OK」を押すと図7の画面になります。「数値」
欄にはA1、「範囲」欄にはA1:E1を入力します。

図7



- (4) 図7で「範囲」欄にA1:E1を入力後、「F4」キーを押す
とA1:E1に\$マークが追加され、\$A\$1:\$E\$1になります。

図8



- (5) 「OK」を押すとA2のセルに順位「4」が表示されます。

(6) A2のセルをB2からE2までコピーするとすべての数値に対して順位が表示できます。

図 9

	A	B	C	D	E
1	5	9	7	12	4
2	4	2	3	1	5

(7) A3のセルにカーソルを移動させます。

(8) A3のセルに「=if(A2=3,A1,0)」を入力します。

式の意味は、「A2の数字が3ならA1の数値を、そうでなければ0を表示しなさい」です。

図 10

	A	B	C	D	E
1	5	9	7	12	4
2	4	2	3	1	5
3	=if(A2=3,A1,0)				
4					

Enterキーを押すとA2は4番目なのでA3には「0」が表示されます。

(9) A3のセルをB3からE3までコピーするとC3には7、それ以外には0が表示されます。

図 11

	A	B	C	D	E
1	5	9	7	12	4
2	4	2	3	1	5
3	0	0	7	0	0
4					

(10) 「MAX」を使ってA4のセルにA3～E3の最大値を表示させれば課題は終了です。

【練習 2】

発生させた5つの乱数の中で3番目に大きな数を求める

(1) 課題1で作成したシートのセルA1に「=RAND()」を入力します。

図 12

	A	B	C	D	E
1	=RAND()	9	7	12	4
2	5	2	3	1	4
3	0	0	7	0	0
4	7				

この関数は0と1の間の数値を同じ確率で発生させる関数です。それぞれ違う小数がA1に表示されたはずですが。周囲の人と見比べてみましょう。リターンキーを押すと数値が変化します。

(2) A1のセルをB1からE1までコピーします。

図 13

	A	B	C	D	E
1	0.926405	0.736327	0.675218	0.529185	0.333847
2	1	2	3	4	5
3	0	0	0.675218	0	0
4	0.675218				
5					

A1からE1の数値に合わせて、A2からE2に新しい順位が表示されます。A3からE3には3番目に大きい数値または0が表示され、A4には3番目に大きい数値が表示されています。



準備は完了しました。それでは書類で1位だった相手を10点、2位を9点とし、逐次得点を付与すると10位の人は1点になります。速決型戦略で獲得する得点を表示させるワークシートを完成させて、操作を繰り返すと

獲得できる得点をシミュレーションできます。図14が完成したワークシートの一例で、これで操作を1000回繰り返した結果が表15と表16になりました。

図 14

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1		順番	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2		乱数	0.439	0.244	0.281	0.832	0.045	0.517	0.844	0.798	0.261	0.889
3		(順位)	6	9	7	3	10	5	2	4	8	1
4		得点	5	2	4	8	1	6	9	7	3	10
5		獲得点			4	8		6	9	7		10
6		2人目(計算1)	5									
7		3人目(計算2)	min(1,2)=	2								
8		4人目(計算3)	min(1~3)=	2								
9			2	4	3	1						
10		5人目(計算4)	0	2	0	0						
11					4位の得点	2						
12			2	4	3	1	5					
13		6人目(計算5)	0	2	0	0	0					
14					4位の得点	2						
15			3	5	4	1	6	2				
16		7人目(計算6)	0	2	0	0	0	0				
17								5位の得点	2			
18			4	6	5	2	7	3	1			
19		8人目(計算7)	0	0	5	0	0	0	0			
20								5位の得点		5		
21			5	7	6	2	8	4	1	3		
22		9人目(計算8)	0	0	4	0	0	0	0	0		
23											4	
24		回数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
25		最終結果			4							
26												

表 15 各回ごとの決定回数

順番	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	合計
度数	0	513	321	113	43	4	6	0	0	0	1000

表15から1000回の実施で2番目に見た書類の相手をお見合い相手に選ぶ回数が最も多く、最大でも7番目の書類を目にした時点で選考は終了しています。まさに「速決型」ですね。

表 16 獲得した得点の回数

得点	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	合計
回数	0	36	67	70	96	125	126	140	161	179	1000

また、表16からは得点10（書類審査で1位）の相手を選ぶ頻度が最も多く18%近い割合であることも分かります。得点の平均は7.024で標準偏差は2.35になります。



表14の意味はよく分かりませんが、実際にはセルに関数が入力されているわけですね。どのような式が入力されているのでしょうか？



ワークシートの作り方は人それぞれですが、RAND、RANK、MIN、MAX、IFだけで作成できますから図14の形式にとらわれずに自分で工夫してみましょう。



現実的には0に近い乱数が発生した場合、アンケート結果が一致しないのでお互いにお見合い相手を選ぶことはないのでは？



レベル集合として1に近い数値を考えればよいですね。 $\alpha=0.9$ とし、発生させる乱数も0.9から1の間に限定してから順位を付けるだけなので、図14でも問題ありませんが、気になるなら $=RAND()*0.01+0.9$ として乱数を発生させるとよいでしょう。

課題 1

速決型戦略の他にはどのような戦略を考えることができるでしょうか。シミュレーションを行うワークシートを作成して戦略の優劣を比較してみましょう。



ここで1つ問題です。戦略の優劣の判断基準とは何をさすのでしょうか？



最高得点を獲得する比率や得点の平均だと思います。



最高得点を獲得する比率が高くて得点の平均が低かったり、逆に平均が高くて最高点の比率が低い場合があるかもしれませんよ。



最大値、最小値や平均値の他に標準偏差も重要な判断基準ですね。データのばらつきが大きいのはリスクが大きいということです。経済学ではリスク分散のためのポートフォリオが問題になりますが、逆にばらつきが大きい方が有利なモデルだって存在するかもしれませんね。

課題2

「戦略の優劣」という視点で平均値、最大値や最小値だけではなく標準偏差が問題となる事例を具体的に考えてみましょう。



条件（3）の「（相手が）あなたとのお見合いを希望しているので断られることはありません。」を削除するとどうなるのでしょうか？



こちらが希望しても相手に選んでももらえない場合を考えようということです。



一致する項目が多くても、それぞれの項目に対する評価の重みを考えることで相手から選んでももらえない場合もあるでしょうね。

課題3

条件（3）の「断られることはありません。」を削除した場合、どのような数理モデルを考えればよいのでしょうか？



速決型戦略では1人目を見送ることにしていますが、1人目にすべての項目で一致する人（ $\mu=1$ ）の書類を目にしたら戦略を放棄して1番目の人を選びませんか？ $\mu=0.95$ や $\mu=0.90$ なども高い数値ですが戦略を放棄するかは微妙になります。



恋愛のジレンマですね。

えっ？囚人のジレンマでは？

「恋の虜」になったら
捕らわれの身ですよ。

なるほど....

囚人と同じですね。



心を奪われた人は被害者で恋泥棒の方が窃盗犯だと思うのですが....

課題4

データを見てから当初の戦略を継続するか破棄するかを判断するような数理モデルを考えてみましょう。



ところでアンケートがYesとNoだけの選択ならメンバーシップ関数になりますが、各項目に関心の度合いも表示できるような場合、例えば5段階で評価した場合はどうなるのでしょうか？

課題5

アンケートの各項目がそれぞれメンバーシップ関数で表れるとき、相手に対する評価を定義する方法を考えてみましょう。



乱数は様々なシミュレーションに使えますが、問題解決のための手段の1つでしかありませんし、仮説を立てなければ使いみちがありません。例題1では一様乱数を使用しましたが、正規分布になるようにデータを発生させることもできます。

課題6

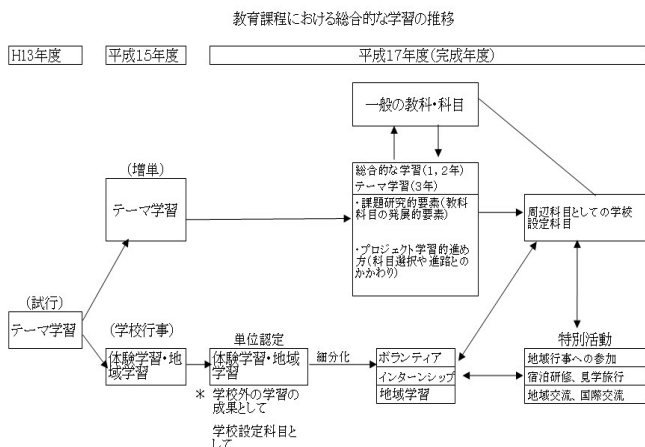
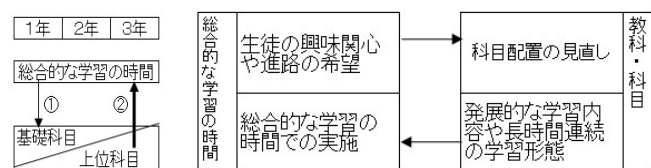
身の周りの問題について説明できるモデルを考え、乱数を使ってシミュレーションしてみましょう。

【余談～令和から昭和へタイムスリップ】

当時は例題1を参考にして「乱数やif文を使った作品」を生徒に作成してもらいました。その中に小学生用の算数教材（別添資料2）があり、それをヒントに私も乱数を用いて小テストの内容ごとに学習教材を作成しました。（別添資料3）小テストの追試を廃止し、不合格者の放課後の居残り学習用プリントとして使用することで、その成果を「小テスト合格」としました。これを「到達度」として評価すると「知識」、居残り学習した生徒が分からない問題に取り組んだという事象を評価すると「意欲の評価」として考えることができます。昭和の時代には小テストに限らず、定期試験、単元テスト、課題テストなどすべてのテストを到達度で評価し、時間軸で「到達度の変化」を生徒の「努力」と考えることで総括的評価では「平常点」としました。しかし学力の高い生徒ほど「伸びしろ」が少ないという欠点もあり、大学を受験しない成績優秀者を学習指導要領の中で指導するには工夫が必要でした。当時の平常点は「総合的な学習の時間」の趣旨や評価方法に類似点が多く、生徒個々に到達目標があり、目標達成までの学習経過が評価対象であること、成果は数値化せず取り組みの過程を個別に説明できれば教務内規に従って平常点を付与することなど、初任者として昭和の時代に取り組んだ指導法や評価法、すなわち到達度評価に時間軸を入れて変化を平常点として評価する指導法（評価法）はポートフォリオ評価だったように思います。

穂別高校では平成13年度の移行措置期間から総合的な学習の時間の導入し、「普通科に導入された課題研究」として捉えることで「教科横断的に設定したテーマを解決させるための学習領域」として実施しましたが、そこで問題になるのが「生徒にテーマをどのように設定させるか」ということでした。

テーマ設定には課題の発見という「種まき」が各教科に求められますが、知識の蓄積ではなく「活用を考えさせる」ことで積極的に授業に参加する態度が求められ、これにより学習意欲や興味関心も「学力」として重要な位置を占めることになりました。



また、生徒が考えたテーマを集約して分析することは教育課程の評価資料としての価値もあり、学校設定教科・科目の検討などを含めて教科や特別活動の領域の改善にも役立ちます。観点別評価、総合的な学習の時間、学校設定教科・科目は3点セットとして機能させることで最大の教育効果を発揮できるのだと思いました。その後の学習指導要領の改定により、「種まき」の部分は「課題学習」、学校設定科目・教科は「理数探究」として令和に引き継がれているように思います。

【添付資料】

- 資料1 高校数学の周辺～コンピュータで解析する
- 資料2 数学Bの生徒作品（PDF）
- 資料3 定積分の計算の課題作成シート（PDF）

【参考文献】

- 巻頭で述べた通り、例題1の「お見合い問題」は数学Bで使用した教材の主要部分で、オリジナル教材は
- [1]高校数学の周辺（第86回全国算数・数学教育研究大会）で発表したものです。その概要を[資料1]として添付しています。
 - [2]ORのはなし 大村平（日科技連）には例題1の条件に対する様々な戦略が記載されています。
- 数学Bの授業の中で生徒が制作した作品の一部を[資料2]としてPDFで添付しています。
- 乱数を使用した授業（または講習）の教材としては
- [3]Excelを用いた補習課題作成シート（第57回数実研レポート）
 - [4]数理モデルで集団ゲームしてみました（第129回、130回数実研レポート）
 - [5]問題解決のための戦略のモデル化について（第59回北海道算数数学研究大会）

があり、[3]のワークシートはPDFで[資料3]として添付しています。また

- [6]畑には何を植える？かまぼこの原料はどうする？（第131回数実研レポート）

は[5]の改定版で、資料に[5]も添付しています。

- ファジィ理論については
 - [7]ファジィ理論と応用 山下元 他（学文社）
 - [8]ファジィ情報分析 州之内治男 他（共立出版）
- を参考にしました。

- [課題2]に関係した教材として、[5]、[6]および
- [9]「畑には何を植える？・・・」への序章（第132回数実研レポート）

- [10]モデルを探せ（第129回数実研レポート）

があり、[10]は1時間用の教材として数学Iで使用しました。

これらの多くは「総合的な学習の時間」のテーマ設定のための「種まき」として数学の授業で使用した教材、またはその改定版です。当時の「総合的な学習の時間」の詳細は[4]（130回レポート）で資料4として添付しています。

レポートの中で言及できなかった「ゲーム理論」については

- [11]人間社会のゲーム理論 鈴木光男（講談社現代新書）
- に多くのジレンマゲームの説明があり、読み物として課題4の参考になります。