私の数学散歩道（54）

三 角 関 数 関 連 あ れ こ れ (2)

数実研会員　　村田　洋一

今回は前回に引き続き、三角関数関連あれこれ（2）として２元２次連立の三角方程式の解と 7.5° の三角関数の値を求める問題を作った。とくに $\left[2\right]$ の２）の解は方程式が複雑になり、６次の　代数方程式を解くことになったが、別解で簡単な方法を考えてみた。

更にこれら６個の解を無理数で表示することを試みた。これから因数分解もできるが煩雑になるため取りやめた。

（問題）

$\left[1\right]$ 次の連立２元２次の三角方程式を解け。（$(0<x,y<\dfrac{\pi}{2})$

$$\sin^2 x+\sin^2 y=1 \cdot\cdot\cdot ① \qquad \cos x\cos y=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\cdot\cdot ②$$

②より　$\cos^2 x\cos^2 y=(1-\sin^2 x)(1-\sin^2 y)=\dfrac{3}{16}$　　①より $1-\sin^2 x=\sin^2 y$

これを代入して　$\sin^2 y(1-\sin^2 y)=\dfrac{3}{16}$　　$16\sin^4 y-16\sin^2 y+3=0$

因数分解して　　$(4\sin^2 y-1)(4\sin^2 y-3)=0$　　$\sin y=\pm\dfrac{1}{2},\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin x>0,\sin y>0$　また①、②は対称式であるから $\sin y=\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　$\sin x=\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2}$

これから　　$(x,y)=(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{3}),(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{6})$ が求める解である。

$\left[2\right]$ 次の問いに答えよ。

（1）半角の公式を用い $\tan\dfrac{\pi}{24}$ の値を小数第４位まで求めよ。

(2)　$\tan 6\theta$ を $\tan\theta$ の式で表わし、$\tan\dfrac{\pi}{24}$ を解とする 6 次方程式を求め、また

計算ソフトを使い　解 $x_{1,}x_2$,・・x_6 を小数第 4 位まで書き出せ。

（３）(1)の結果を参考に 解 $x_{1,}x_2$,・・x_6 を無理数表示に直せ。

（1）半角の公式を使って

$\dfrac{1}{2}\times 30°\times\dfrac{1}{2}=7.5°$ であるから　$\alpha=30°$ として　半角の公式から

$\tan^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$　　$\tan^2 15°=\dfrac{1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=7-4\sqrt{3}=(2-\sqrt{3})^2$

$\tan 15°>0$ より　$\tan 15°=2-\sqrt{3}$　倍角の公式から

$\tan 15°=\tan 2\cdot 7.5°=\dfrac{2\tan 7.5°}{1-\tan^2 7\cdot 5°}=2-\sqrt{3}$　$\tan 7.5°$　について整理して

$(2-\sqrt{3})\tan^2 7.5°+2\tan 7.5°-(2-\sqrt{3})=0$

$\tan^2 7.5°+2(2+\sqrt{3})\tan 7.5°-1=0$

$\tan 7.5°=-(2+\sqrt{3})\pm\sqrt{8+4\sqrt{3}}=-(2+\sqrt{3})\pm(\sqrt{6}+\sqrt{2})$　$\tan 7.5°>0$ より

$\tan 7.5°=\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}-2=2.449489-1.732051+1.414213-2=0.13165$

小数第 5 位を四捨五入して　$\tan 7.5°=0.1317$ が解となる。

(2) $\tan 6\theta$ を $\tan\theta$ で表わすため

$$\tan 3\theta = \tan(\theta+2\theta) = \frac{\tan\theta+\tan 2\theta}{1-\tan\theta\tan 2\theta} = \frac{\tan\theta+\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}}{1-\dfrac{2\tan^2\theta}{1-\tan^2\theta}} = \frac{3\tan\theta-\tan^3\theta}{1-3\tan^2\theta}$$

同様に $\tan 5\theta = \tan(2\theta+3\theta) = \dfrac{\tan 2\theta+\tan 3\theta}{1-\tan 2\theta\tan 3\theta} = \dfrac{\tan^5\theta-10\tan^3\theta+5\tan\theta}{5\tan^4\theta-10\tan^2\theta+1}$

$$\tan 6\theta = \tan(\theta+5\theta) = \frac{\tan^5\theta+\dfrac{\tan^5\theta-10\tan^3\theta+5\tan\theta}{5\tan^4\theta-10\tan^2\theta+1}}{1-\dfrac{\tan^6\theta-10\tan^4\theta+5\tan^2\theta}{5\tan^4\theta-10\tan^2\theta+1}}$$

$$= -\frac{2\tan\theta(3\tan^4\theta-10\tan^2\theta+3)}{\tan^6\theta-15\tan^4\theta+15\tan^2\theta-1}$$

$$= -\frac{2\tan\theta(3\tan^2\theta-1)(\tan^2\theta-3)}{(\tan^2\theta-1)(\tan^4\theta-14\tan^2\theta+1)}$$

分母子に共通因数を持たず簡約できないから、その前の式で

$\theta = \dfrac{\pi}{24}$ と置くと $0 < \tan\dfrac{\pi}{24} < \tan\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = 0.5774$　 $\tan 6\theta = \tan\dfrac{\pi}{4} = 1$ から

$$\tan^6\theta+6\tan^5\theta-15\tan^4\theta-20\tan^3\theta+15\tan^2\theta+6\tan\theta-1=0$$

これは相反方程式でなく、計算ソフト（DKA 法）を使って解くと

$\theta_1 = -7.5958$　 $\theta_2 = -1.3032$　 $\theta_3 = -0.4142$　 $\theta_4 = 0.1317$

$\theta_5 = 0.7673$　 $\theta_6 = 2.4142$　 （小数第 5 位を四捨五入）

$0 < \tan\theta < 0.5774$ より　 $\tan\theta_4 = 0.1317$　 が解である。

(3) (1)の結果より

$$\tan 7.5^\circ = -(2+\sqrt{3}) \pm (\sqrt{6}+\sqrt{2})$$

複号が＋の時　 $x_4 = -(2+\sqrt{3}) + (\sqrt{6}+\sqrt{2}) = 0.1317$

“　—の時　$x_1 = -(2+\sqrt{3}) - (\sqrt{6}+\sqrt{2}) = -7.5958$

x_3 と x_6 は視認で　$x_3 = 1-\sqrt{2} = -0.4142$

$$x_6 = 1+\sqrt{2} = 2.4142$$

$$x_2 = -(2+\sqrt{6}) + (\sqrt{2}+\sqrt{3}) = -1.3032$$

試行錯誤で　$x_5 = -(2+\sqrt{2}) + (\sqrt{3}+\sqrt{6}) = 0.7673$

上記の x_1 から x_6 が求める無理数表示の解である。

以　上