

特別な高次連立方程式を解いてみよう！

数実研会員 村田 洋一

今回は α 、 β 、 γ の和、4乗和、5乗和からなる3元5次連立方程式の解法を考えた。
計算がかなり面倒であるが、3変数の基本対称式に還元し3次方程式を解く事で上手く
いった。解法に誤りがなければ24組の解でOKのはずでこれを答えとした。

(問題) 次の連立方程式の実数解と複素数解をすべて求めよ。

$$\alpha + \beta + \gamma = 1 \cdots (1)$$

$$\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4 = 33 \cdots (2)$$

$$\alpha^5 + \beta^5 + \gamma^5 = 1 \cdots (3)$$

$$\text{解 (2)から } \alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4 = (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^2 - 2(\alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2) = \{(\alpha + \beta + \gamma)^2$$

$$-2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)\}^2 - 2\{(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)^2 - 2\alpha\beta\gamma(\alpha + \beta + \gamma)\} = 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)^2$$

$$-4((\alpha + \beta + \gamma)^2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) + (\alpha + \beta + \gamma)^4 + 4\alpha\beta\gamma(\alpha + \beta + \gamma)) \quad (1)より$$

$$= 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)^2 - 4(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) + 1 + 4\alpha\beta\gamma$$

ここで $a = \alpha + \beta + \gamma, b = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha, c = \alpha\beta\gamma$ と置くと (2)の左辺は

$$2b^2 - 4b + 1 + 4c = 33 \cdots (4) \quad \text{次に(3)を変形して}$$

$$\begin{aligned} \alpha^5 + \beta^5 + \gamma^5 &= (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)(\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3) - \alpha^2\beta^2(\alpha + \beta) - \beta^2\gamma^2(\beta + \gamma) - \gamma^2\alpha^2(\gamma + \alpha) \\ &= (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)(\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3) - \alpha^2\beta^2(1 - \gamma) - \beta^2\gamma^2(1 - \alpha) - \gamma^2\alpha^2(1 - \beta) \\ &= (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)(\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3) - (\alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2) + \alpha\beta\gamma(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) \\ &= (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)(\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3) - (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)^2 + 2\alpha\beta\gamma + \alpha\beta\gamma(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) \\ &= (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)(\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3) - b^2 + bc + 2c \cdots (5) \end{aligned}$$

$$\text{また } \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) = 1 - 2b$$

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = (\alpha + \beta + \gamma)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha) + 3\alpha\beta\gamma$$

$$= (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 3(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) + 3\alpha\beta\gamma = 1 - 3b + 3c$$

これらを(5)に代入して $(2b-1)(3b-1-3c) - b^2 + bc + 2c = 1$

これを簡単にして $b^2 - b - bc + c = (b-c)(b-1) = 0 \quad b=c, b=1 \cdots (6)$

以下、解の候補を(4),(6)から検討してみよう。

1) $b=c$ のとき $c^2 = 16 \quad c = \pm 4$ 、 $c = 4$ では $b^2 - 2b - 8 = 0 \quad b = -2, b = 4$ 、

$c = -4$ では $b = -4 \quad b^2 - 2b - 24 = 0 \quad b = 6, b = -4 \quad b = 6$ では $c = -4$

2) $b=1$ のとき (4)より $c = \frac{17}{2}$ 、 $b=c=1$ のとき (4)が不成立

これから 解を構成する (a,b,c) の候補を

$(1, -4, -4), (1, 6, -4), (1, 1, \frac{17}{2}), (1, 4, 4), (1, \frac{17}{2}, \frac{17}{2}), (1, 6, 6) (1, -2, 4), (1, -2, -2)$ に絞る。

最初から見ていく。(a,b,c) を解とする 3 次方程式とその解は (複号同順)

① $x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0 \quad x_1 = -2, x_2 = 1, x_3 = 2$

② $x^3 - x^2 + 6x + 4 = 0 \quad x_1 = -0.5786, x_{2,3} = 0.7893 \pm 2.5081i$

③ $x^3 - x^2 + x - \frac{17}{2} = 0 \quad x_1 = 2.2433, x_{2,3} = -0.6216 \pm 1.8446i$

④ $x^3 - x^2 + 4x - 4 = 0 \quad x_1 = 1, x_2 = 2i, x_3 = -2i$

⑤ $x^3 - x^2 + \frac{17}{2}x - \frac{17}{2} = 0 \quad x_1 = 1, x_2 = 2.9155i, x_3 = -2.9155i$

⑥ $x^3 - x^2 + 6x - 6 = 0 \quad x_1 = 2.4495i, x_2 = -2.4495i, x_3 = 1$

⑦ $x^3 - x^2 - 2x - 4 = 0 \quad x_1 = 2.4675, x_{2,3} = -0.7338 \pm 1.0405i$

⑧ $x^3 - x^2 - 2x + 2 = 0 \quad x_1 = 1, x_2 = 1.4142, x_3 = -1.4142$

3 次方程式の解と係数の関係から 3 つの解の積 $\alpha\beta\gamma$ (本稿では $=c$) は定数項に現れる。定数項が ± 4 なのは上記の①、②、④、⑦で解はこの 4 つ。

各々の 3 次方程式は 3 個の解が異なるので 都合 6 通りの組み合わせができ、4 本の方程式から解の組は 24 (実数解 6 組、虚数解 6 組、複素数解 12 組) が求めるもの。

具体的に (α, β, γ) を列挙する。(複号同順)

$(2, 1, -2), (-2, 2, 1), (1, -2, 2), (1, 2, -2)(2, -2, 1)(-2, 1, 2)$
 $(-0.5786, 0.789 \pm 2.50i, 0.789 \mp 2.50i), (0.789 \pm 2.50i, 0.789 \mp 2.50i, -0.5786)$
 $(0.789 \pm 2.50i, -0.5786, 0.789 \mp 2.50i)$
 $(1, 2i, -2i), (2i, -2i, 1), (-2i, 1, 2i), (2i, 1, -2i)(-2i, 2i, 1)(1, -2i, 2i)$
 $(2.467, -0.734 \pm 1.04i, -0.734 \mp 1.04i), (-0.734 \pm 1.04i, -0.734 \mp 1.04i, 2.467)$
 $(-0.734 \pm 1.04i, 2.467, -0.734 \mp 1.04i)$

ここで今はやりの AI((Agent :Yahoo Japan ID ログイン)でどのように解答するか聞いてみた。方程式(1)～(3)の実数解と複素数解の組数は？と入力すると、式の間で矛盾が起こり、実数解・複素数解とも一切存在せずとのこと。単に解の組と聞くと実数解は存在しない、しかし複素数まで広げると状況が変わると回答。

間違った結論と思うが、ミスは単純なもので突っ込みも深く、今後の発展の余地は大と感じました。議論に行き詰まった時には役立ちます。興味のある方はご自分の課題に応用しては如何でしょうか。

以 上