解答例

(1)　定義式①で $t=0$ とすると

$$f(s)=f(s)+f(0) \qquad \text{ゆえに}\quad f(0)=0$$

(2)　$f(3)$ について，定義式①より

$$f(3)=f(2+1)=f(2)+f(1)=f(1+1)+f(1)=\{f(1)+f(1)\}+f(1)=3\cdot f(1)$$

また，$f(-2)$ について定義式①と前の結果より

$$f(0)=f(-2+2)=f(-2)+f(2)=f(-2)+2\cdot f(1)$$

ここで，(1)より

$$0=f(-2)+2\cdot f(1) \qquad \text{ゆえに}\quad f(-2)=-2\cdot f(1)$$

次に，$f\left(\dfrac{2}{3}\right)$ について定義式①より

$$f(2)=f\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\right)=3\cdot f\left(\frac{2}{3}\right)$$

ここで，前の結果と $f(2)=2\cdot f(1)$ から

$$2\cdot f(1)=3\cdot f\left(\frac{2}{3}\right) \qquad \text{ゆえに}\quad f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{3}\cdot f(1)$$

(3)　$f(r)=r\cdot f(1)$

(4)　定義式②で $s=t=1$ とすると

$$f(1)=f(1)\cdot f(1) \text{ から} \qquad \{f(1)\}^2-f(1)=0$$
$$f(1)\{f(1)-1\}=0$$
$$f(1)=0,\ 1$$

また，$\{f(\sqrt{6})\}^2=f(\sqrt{6})\cdot f(\sqrt{6})=f(\sqrt{6}\cdot\sqrt{6})=f(6)=6\cdot f(1)$ から

$$\{f(\sqrt{6})\}^2=0,\ 6 \qquad \text{ゆえに}\quad f(\sqrt{6})=0,\ \pm\sqrt{6}$$

(5)
$$\{f(\sqrt{2}+\sqrt{3})\}^2=f((\sqrt{2}+\sqrt{3})^2)=f(5+2\sqrt{6})=5\cdot f(1)+2\cdot f(\sqrt{6})$$

ここで，(4)の結果より

$$\{f(\sqrt{2}+\sqrt{3})\}^2=0,\ 5\pm2\sqrt{6}=0,\ (\sqrt{3}\pm\sqrt{2})^2$$

ゆえに

$$f(\sqrt{2}+\sqrt{3})=0,\ \sqrt{3}+\sqrt{2},\ \sqrt{3}-\sqrt{2},\ -(\sqrt{3}+\sqrt{2}),\ -(\sqrt{3}-\sqrt{2})$$
$$=0,\ \sqrt{3}+\sqrt{2},\ \sqrt{3}-\sqrt{2},\ -\sqrt{3}-\sqrt{2},\ \sqrt{2}-\sqrt{3}$$

(6)　$-\sqrt{3}-\sqrt{2}<\sqrt{2}-\sqrt{3}<0<\sqrt{3}-\sqrt{2}<\sqrt{3}+\sqrt{2}$ より

$$m=\sqrt{2}-\sqrt{3}$$

であるから

$$f_2(\sqrt{2}+\sqrt{3})=\sqrt{2}-\sqrt{3}$$

このとき

$$\begin{aligned}-1=f_2(-1)&=f_2((\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3}))\\&=f_2(\sqrt{2}+\sqrt{3})\cdot f_2(\sqrt{2}-\sqrt{3})\\&=(\sqrt{2}-\sqrt{3})\cdot f_2(\sqrt{2}-\sqrt{3})\end{aligned}$$

よって

$$f_2(\sqrt{2}-\sqrt{3})=\frac{-1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}=\frac{-(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{(\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{3})}=\sqrt{2}+\sqrt{3}$$

したがって

$$
\begin{aligned}
2\cdot f_2(\sqrt{2}) &= f_2(2\sqrt{2}) \\
&= f_2(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{3}) \\
&= f_2(\sqrt{2}+\sqrt{3})+f_2(\sqrt{2}-\sqrt{3}) \\
&= \sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{3} \\
&= 2\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

ゆえに　　$f_2(\sqrt{2})=\sqrt{2}$