

着眼点

- (1) 比の計算である。
- (2) $a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > a_5$ と合計 2025 より a_5 の値の範囲を求める。
- (3) ①条件より式をたてる。 $a_1 = a_2 = \dots = a_{k-1} = a$ に注意する。
② k についての恒等式であり、 T を s で表すことができる。

解答例

- (1) 題意より、 $a_1 : a_2 : a_3 = 7 : 6 : 4$ なので、 $a_1 = 7p$ 、 $a_2 = 6p$ 、 $a_3 = 4p$ ($p > 0$) とおくと、 $a_1 + a_2 + a_3 = 2023$ より、 $17p = 2023$

$$p = 119$$

よって、 $a_1 = 833$ 、 $a_2 = 714$ 、 $a_3 = 476$

- (2) $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 > 5a_5$

すなわち、 $2028 > 5a_5$

$$a_5 < 405.6$$

a_5 は整数なので、 $a_5 \leq 405$

$a_5 = 405$ のとき、1万円ずつ増やすと、残り4人は406、407、408、409となり、合計2035で不適。

$a_5 = 404$ のとき、1万円ずつ増やすと、残り4人は405、406、407、408となり、合計2030で不適。

$a_5 = 403$ のとき、1万円ずつ増やすと、残り4人は404、405、406、407となり、合計2025で、残りの3万円を年齢が高い順に与えると、 A_1 に2万円、 A_2 に1万円、または、 A_1 に1万円、 A_2 に1万円、 A_3 に1万円を与えることになる。

$$\text{したがって、}(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = (409, 407, 405, 404, 403), \\ (408, 407, 406, 404, 403)$$

$a_5 = 402$ のとき、1万円ずつ増やすと、残り4人は403、404、405、406となり、合計2020であり、残りの8万円を年齢が高い順に与えると、 A_1 に3万円、 A_2 に2万円、 A_3 に2万円、 A_4 に1万円を与えることになる。

$$\text{したがって、}(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = (409, 407, 406, 404, 402)$$

$a_5 \leq 401$ のとき、1万円ずつ増やしたときの合計金額と2028との差が13以上となり、 $a_{k+1} - a_k = 1$ または 2 ($k = 1, 2, 3, 4$) を満たして与えることができない。

よって、以上より、 $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = (409, 407, 405, 404, 403), \\ (408, 407, 406, 404, 403), \\ (409, 407, 406, 404, 402)$

$$(3)\textcircled{1}\text{題意より, } a_k = 32k + \frac{1}{s}(T - a_1 - a_2 - \dots - a_{k-1} - 32k)$$

全員同額の a 万円なので, $a_1 = a_2 = \dots = a_{k-1} = a$

$$\text{よって, } a_k = 32k + \frac{1}{s}\{T - (k-1)a - 32k\}$$

$$\textcircled{2} a_k = a \text{ なので, } \textcircled{1}\text{の結果より, } a = 32k + \frac{1}{s}\{T - (k-1)a - 32k\}$$

$$k \text{ について整理すると, } (32s - a - 32)k + T + a - sa = 0$$

$$k \text{ についての恒等式なので, } 32s - a - 32 = 0, \quad T + a - sa = 0$$

$$a = 32(s-1), \quad T = (s-1)a$$

$$\text{上記の 2 式より, } T = 32(s-1)^2$$

$$2030 < T < 2070 \text{ なので, } 2030 < 32(s-1)^2 < 2070$$

$$63.4\cdots < (s-1)^2 < 64.6\cdots$$

$$s \text{ は正の整数なので, } s-1 = 8$$

$$\text{よって, } s = 9$$

$$\text{このとき, } T = 32 \times 8^2 = 2048, \quad a = 32 \times 8 = 256, \quad n = T \div a = 8$$