

講評

普通のじゃんけん vs 王様じゃんけん。どちらが“優秀”かを期待値を使って分析してみようというのがこの問題のテーマです。(1)(2)はおまけで、(3)でどれだけ勝負できるかを見たかったのですが、残念ながら(3)を解き切ることができた人はほとんどいませんでした。数学コンテストは1題にかけられる時間は40分以上とかなり長い時間をかけられます。それだけにもっと丁寧に考えて、計算して勝負してほしかったなあというのが正直な感想です。

(1)の ${}_n C_k = {}_{n-1} C_{k-1}$ はどこかで見たことがある人が多いのではないのでしょうか。導出の過程を書いてほしかったのですが、答えしか書かれていない答案も多く見られ、残念でした。導出は ${}_n C_k = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)(k-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}$ を使った答案と ${}_n C_k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ を使った答案が半々といったところでしたが、札幌南高校の伊藤君が面白い解釈で答えてくれたのでここで紹介したいと思います。

「左辺は n 人から k 人のグループを作り、さらにグループの中から1人のリーダーを選ぶ場合の数と解釈できる。ここで、これは、 n 人から1人のリーダーを選び、残りの $n-1$ 人からリーダーでないグループのメンバー $k-1$ 人を選ぶ場合の数と等しい。」

なるほど！素敵な解釈だと思います。このような式の意味を考えた答案も素敵ですね。

(2)は二項定理（二項定理は数学Ⅱで習います）を反復試行を使って証明する問題でしたが、意図通りに考えてくれた人は少なかったです。(a)の反復試行の確率をヒントに考えて欲しかったのですが、意図が見えなかったかなあと残念でした。二項定理を証明することが意図だったので、二項定理そのものを使った答案は減点させてもらい、①反復試行を使った答案、②赤玉 x 個と白玉1個入った袋から玉を取り出してもどす操作を n 回くりかえす場合の数から考えた答案、③教科書通りに二項定理を説明した答案を正答としました。知っている公式でも問題出題者の意図を読み取ることは大切です。そこから新たな発見があるかもしれません。

(3)がこの問題のメイン、普通のじゃんけん vs 王様じゃんけんです。 E_n が1回のじゃんけんで勝ち残る人数の期待値、 F_n は王様じゃんけんで勝ち残る人数の期待値を表しています。こういう勝負は早く終わった方がいいので期待値が少なければ少ないほど“優秀”だと考えましょう。普段の経験から人数が少ないときには普通のじゃんけんを、人数が多い時には王様じゃんけんをすることが多いですが、それは理にかなっているのか、その境界はどこか探してみましょう。

(a)~(c)は具体例です。単純な期待値の計算なのでもっとできるかなあと思ったのですが、あまりできは良くなかったです。 $n=2$ のときは書き出しても9通りしかないのですが…。ちょっと残念でした。計算してみると $n=2, 3$ と $n=4$ で E_n と F_n の大小関係が変わっています。普段の経験から人数が増えるほど王様じゃんけんの方が優秀だと思われるので、人数が4人以上のとき、王様じゃんけんの方が優秀だという結果が出ました。

この結果はあくまでも経験に基づくものです。そこで、(d)でそれを数学的に証明しようというわけです。証明の流れは、① E_n を n の式で表す、② F_n を n の式で表す、

③ $n \geq 4$ で $E_n > F_n$ を示す，という流れです。①②の E_n ， F_n を求めるために(1)(2)で出した式を使います。けっこう大変な計算ですが頑張るとなかなかシンプルな式になります。シンプルな式なので③の $E_n > F_n$ は数学的帰納法を使わなくても証明できます。大変な計算を乗り越えて，数学的帰納法で証明してくれたのは札幌南高校の牧野君だけでした。すばらしかったです！

この問題から4人以上でじゃんけんをするときは王様じゃんけんをした方が早く終わることがわかりました。かなりびっくりな結果ですよ！この結果を最初に出したとき、「まじか！？」と叫んでしまいました。人数が少なすぎる！！ちなみに「勝ちだけ残る」王様じゃんけんにするともっと人数は少なくなります。王様じゃんけん強すぎ！！

日常生活のいろいろなことを数学的に分析すると時に意外な発見をすることがあります。そして，私たちの経験や印象は意外とあてにならないものだということがわかります。だから数学って面白いんですよ！！

(札幌創成高等学校 外山 尚生)