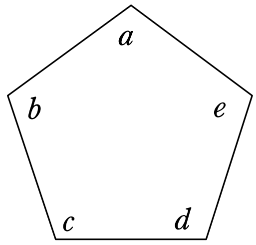
問題 1

正五角形の各頂点に右の図のように整数 a，b，c，d，e がふられている。



このとき次の各問いに答えよ。

(1)　各頂点の数が両隣の平均になっているとする。すなわち

$$b=\frac{a+c}{2},\ c=\frac{b+d}{2},\ \cdots\cdots,\ a=\frac{e+b}{2}$$

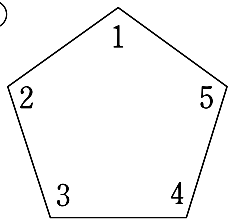
であるとする。このとき，5 つの数 a，b，c，d，e はすべて等しいことを証明せよ。

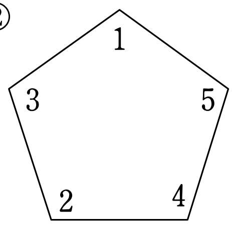
(2)　各頂点にふられた隣り合って並んでいる 4 数を加える。すなわち，$a+b+c+d$，$b+c+d+e$，$c+d+e+a$，$d+e+a+b$，$e+a+b+c$ を考える。このとき，これらの 5 つの和のうち，少なくとも 1 つは偶数であることを証明せよ。

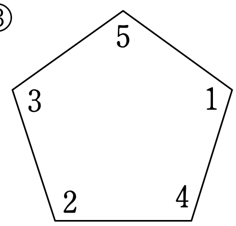
(3)　上の図のように整数をふられた正五角形に対して，次のように F を定義する。

$$F=ab+bc+cd+de+ea$$

次の①～③の正五角形について F の値をそれぞれ求めよ。

①


②


③


(4)　頂点にふられた隣り合って並んでいる 4 数を任意にとり，その 4 数を反時計回りに p，q，r，s とする。p と s，q と r の大小関係が同じ（すなわち，$p<s$ かつ $q<r$ となるか，$p>s$ かつ $q>r$ となる）とき，q と r を入れ替える操作をおこなう。

たとえば，(3)の①の正五角形の 4 数 1，2，3，4 に対して，$1<4$ かつ $2<3$ であるから 2 と 3 を入れ替える操作を行うと，②の正五角形が得られる。また，②の正五角形の 4 数 4，5，1，3に対して，$4>3$ かつ $5>1$ であるから 5 と 1 を入れ替える操作を行うと，③の正五角形が得られる。

この操作を今の例のように繰り返し行うとする（任意にとる 4 数は各回で異なってもよい）。このとき，この操作は有限回で終了する，すなわち，この操作を何回か行ったら，それ以上操作ができなくなる数の配置に落ち着くことを証明せよ。