問題２

円に内接する四角形 ABCD の辺と対角線の関係として次の式が成り立つことが知られている。

$$\mathrm{AB}\cdot\mathrm{CD}+\mathrm{DA}\cdot\mathrm{BC}=\mathrm{AC}\cdot\mathrm{BD}$$　（トレミーの定理）

これを次の手順で証明する。

半直線 AB，AD 上に，△ABD∽△ATS（ただし，相似比が $1:k$ とする），かつ，直線 ST が四角形の外側になるように点 S，T をとる。また，直線 AC，ST の交点を P とする。

(1)　△ASP∽△ACB であることを示し，これにより $\mathrm{SP}=\dfrac{k\mathrm{AD}\cdot\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}}$ であることを示せ。

(2)　$\mathrm{AB}\cdot\mathrm{CD}+\mathrm{DA}\cdot\mathrm{BC}=\mathrm{AC}\cdot\mathrm{BD}$ を示せ。

トレミーの定理を使って次の問いに答えよ。（なお，以下の解答には角の大きさを用いないこと）

(3)　1 辺の長さが 1 の正五角形の対角線の長さを求めよ。

(4)　1 辺の長さが a の正七角形の対角線の長さは 2 種類あるが，それぞれの長さを b，c とするとき，a，b，c の関係式を求めよ。

(5)　1 辺の長さが 1 の正九角形の対角線の長さは 3 種類あるが，それぞれの長さを，方程式 $x^3-3x-1=0$ の正の解 k を用いて表せ。