問題４

自然数の平方（２乗）で表すことができる数を平方数という。

N を平方数でない自然数，b を 0 以上の整数とする。また，実数 x に対して $[x]$ は x を超えない整数を表し，整数でない実数 y について，関数 $d(y)$ を

$$d(y)=\frac{1}{y-[y]}$$

と定義し，関数 d を n 回繰り返すとき，つまり，$d(d(\cdots d(y)))$ を $d^{(n)}(y)$ と表すこととする。このとき，$d^{(n)}(y)$ と y との関係を考える。また，$[d(b+\sqrt{N})]=[b+\sqrt{N}]$ が成立するとき，性質Ｐを満たすということにする。なお，$[\sqrt{N}]=a$ と表すこととする。

(1) $d(\sqrt{2})$，$d^{(3)}(\sqrt{3}+1)$，$d^{(10)}(\sqrt{29})$ を求めよ。なお，$\sqrt{2}\fallingdotseq 1.4$，$\sqrt{3}\fallingdotseq 1.7$，$\sqrt{29}\fallingdotseq 5.3$ であることを用いてよい。

(2) $b=0$，$N=a^2+1$ のとき，性質Ｐを満たさないことを示せ。

(3) $b=0$，$N=a^2+2$ のとき，性質Ｐを満たすことを示せ。

(4) 自然数 k は $2<k<2a+1$ を満たすとする。このとき，$b=0$，$N=a^2+k$ のとき，性質Ｐを満たさないことを示せ。

(5) $b\neq 0$ のとき，性質Ｐを満たす自然数の組 $(N,\ b)$ を a を用いて表せ。

(6) 方程式 $d(b+\sqrt{N})=b+\sqrt{N}$ を満たす自然数の組 $(N,\ b)$ は，$(N,\ b)=(a^2+1,\ a)$ のみであることを示せ。なお，$\sqrt{N}$ は無理数であることを用いてもよい。

(7) $N=a^2+k\ (1\leqq k<2a+1)$ とする。このとき，$d^{(2)}(b+\sqrt{N})=b+\sqrt{N}$ を満たすのは $a=b$ かつ k は $2a$ の約数のときのみであることを示せ。なお，$\sqrt{N}$ は無理数であることを用いてもよい。