$\boxed{\text{配点}}$

⑴　8点　　⑵　8点　　⑶　各3点×3＝9点　　⑷　15点

$\boxed{\text{講評}}$

⑴と⑵の問題は肩慣らしにと思い出題しました。本題は⑷の問題で，そのヒントとなるようにと思い，⑶の問題を入れました。

⑴の問題は解答例にもあるように a， b， c， d， e の最小数または最大数に着目すると考えやすかったと思います。しかし，そのように解答した人はごく数人でした。

正解者のうちのほとんどの人は問題文にある条件を a， b， c， d， e の連立方程式とみなしてこれを解いていました。計算が意外と大変で力わざで解いたという答案が多かったです。

この他には，たとえば $a \neq c$ であると仮定して矛盾を導いたという答案もいくつか見られました。

私が面白いと思ったのは，５数の2乗を足し合わせて

$$a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=\left(\frac{e+b}{2}\right)^2+\left(\frac{a+c}{2}\right)^2+\left(\frac{b+d}{2}\right)^2+\left(\frac{c+e}{2}\right)^2+\left(\frac{d+a}{2}\right)^2$$

を変形するものです。右辺を展開して整理すると

$$a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2)+\frac{1}{2}(ac+bd+ce+da+eb)$$

移項して

$$\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2)-\frac{1}{2}(ac+bd+ce+da+eb)=0$$

よって

$$\frac{1}{4}\{(a-c)^2+(b-d)^2+(c-e)^2+(d-a)^2+(e-b)^2\}=0$$

となります。これより $a=c$， $b=d$， $c=e$， $d=a$， $e=b$ となり，５数はすべて等しいと結論するものです。

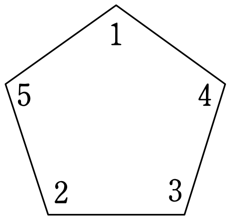
⑵の問題は，解答例のように背理法で辺々加えて矛盾を導く答案も多くありました。しかし，最も多かった答案は背理法または直接法で $a \sim e$ の偶数，奇数の個数で場合分けして一つ一つチェックするものです。

⑶の問題はほとんどの人ができていました。

⑷の問題は，⑶の問題をヒントにしてこの操作をすると F の値が減少していくことに気がついた人はほぼ正解していました。

ほとんどの人は白紙か⑶の問題をヒントにせず新たに考えていたようです。しかし，新たに考えて正解に近づいていた答案は見当たりませんでした。

答案の中には， $\{a, b, c, d, e\}=\{1, 2, 3, 4, 5\}$ の場合に限ってではありますが，５数の円順列24通りすべての場合についてこの操作ができなくなる配置に落ち着くまで行い，有限回で終了すると結論付けているというものもありました。その答案によると24通りのすべての場合は（回転，裏返しを除いて）



という配置に落ち着くようです。

余力のある方は考えてみてほしいことがあります。(4)の問題では正五角形の場合にこの操作が有限回で終了することを証明しましたが，同様に考えることによって一般に正 n 角形 $(n \geqq 4)$ でも成り立ちます。ですから，正五角形以外でもこの問題を考えることができます。先ほどの答案をヒントにして次のような発展問題を考えてみました。

（i） 正六角形の各頂点に 1 から 6 までのすべての整数が 1 つずつふられている。この操作を繰り返し行うと，どのような数の配置に落ち着くか。

（ii） 正七角形の各頂点に 1 から 7 までのすべての整数が 1 つずつふられているときはどうか。

（iii） 一般に正 n 角形 $(n \geqq 4)$ の各頂点に 1 から n までのすべての整数が 1 つずつふられているときに，落ち着く多角形の数の配置に何か規則性があるか。

私も少し考えてみましたが，よくわかりませんでした。何か面白い結果が得られたら私にも連絡してくれると嬉しいです。

全問題を通して，正解まではたどり着かなくとも一生懸命考えてくれた人も多く，皆さんの答案をわくわくしながら読ませていただきました。楽しく採点することができました。どうもありがとうございます。

（北海道文教大学附属高等学校　杉本　幸司）