配点

◎【ルール１】と【ルール２】が等しいことの説明に対して 20 点

等しいことが述べられている	→	5 点
具体例で説明できている	→	10 ～ 13 点
感覚的に説明できている	→	15 点
数学的に説明できている	→	20 点

◎【ルール２】と【ルール３】（または【ルール１】と【ルール３】）が等しいことの説明に対して 20 点

等しいことが述べられている	→	+5 点
どちらか一方の確率が一般的に求められている	→	+2 点（具体例は +1 点）
どちらか一方の期待値が立式できている	→	+2 点
どちらか一方の期待値が計算できている	→	+4 点（具体例は +1～3 点）
２つ目の確率が一般的に求められている	→	+2 点（具体例は +1 点）
２つ目の期待値が立式できている	→	+2 点
２つ目の期待値が計算できている	→	+3 点（具体例は +2～3 点）
感覚的な説明や説明不足	→	+0～10 点

講評

教科書でくじ引きを引く問題はたくさんあります。基本的なものとして，① k 本を同時に引くもの，②１本ずつ k 本引くもの（くじはもとに戻さない），③１本ずつ k 本引くもの（くじはもとに戻す）があります。

定期テストでくじ引きの本数，当たりくじの本数， k の値を具体的に設定して，期待値を比較する問題を作ったことがあります。３通りでやってみたところ、すべての期待値が等しくなりました。この結果がなぜだろう？と思い，数学コンテストの問題にしてみました。

例えば５本のくじで３本があたり， $k=3$ の場合を考えてみましょう。

ルール①の場合， i 本 $(i=1,\ 2,\ 3)$ の当たりを引く確率は５本の中から３本のくじを引き，３本の当たりの中から i 本，２本のはずれの中から $3-i$ 本引けばいいので，確率は $\dfrac{{}_3\mathrm{C}_i\times{}_2\mathrm{C}_{3-i}}{{}_5\mathrm{C}_3}$ になります。ここで，はずれの本数を考えずに $\dfrac{{}_3\mathrm{C}_i}{{}_5\mathrm{C}_3}$ のように答えてしまう答案が多かったです。はずれの場合は，問題文に書かれていませんが，はずれも引く可能性を考えなければいけません。注意しましょう。

ルール②の場合は例えば２本の当たりを引く場合を考えてみましょう。当たり→当たり→はずれの順で引く確率は $\dfrac{2}{5}\times\dfrac{1}{4}\times\dfrac{3}{3}$ です。当たりはずれの順序の並び替えを考えればよく，２本の当たりを引く場合の確率は ${}_3\mathrm{C}_2\times\dfrac{2}{5}\times\dfrac{1}{4}\times\dfrac{3}{3}$ です。これも並び替えを考えられていない答案が多かったです。反復試行を考えてみてください。並び替えの順番を考えなければならなかったのを思い出すでしょう。

ルール③の場合は反復試行なので ${}_3C_2\times\left(\frac{3}{5}\right)^2\times\left(\frac{2}{5}\right)^1$ になります。

ここまでのことから5本のくじで3本があたり，$k=3$ の場合の確率を表にまとめてみましょう。

	当たり0本	当たり1本	当たり2本	当たり3本
ルール①	0	$\frac{{}_3C_1\times{}_2C_2}{{}_5C_3}=\frac{3}{10}$	$\frac{{}_3C_2\times{}_2C_1}{{}_5C_3}=\frac{6}{10}$	$\frac{{}_3C_3}{{}_5C_3}=\frac{1}{10}$
ルール②	0	${}_3C_1\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{3}{10}$	${}_3C_2\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{6}{10}$	$\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{10}$
ルール③	$\left(\frac{2}{5}\right)^3=\frac{8}{125}$	${}_3C_1\left(\frac{3}{5}\right)^1\left(\frac{2}{5}\right)^2=\frac{36}{125}$	${}_3C_2\left(\frac{3}{5}\right)^2\left(\frac{2}{5}\right)=\frac{54}{125}$	$\left(\frac{3}{5}\right)^3=\frac{27}{125}$

この結果からルール①とルール②の確率は同じであることがわかります。ルール①とルール③の確率は違うので，期待値を計算してみましょう。

$$\text{ルール①の期待値}=\frac{3}{10}\times1+\frac{6}{10}\times2+\frac{3}{10}\times1=\frac{18}{10}=\frac{9}{5}$$

$$\text{ルール③の期待値}=\frac{8}{125}\times0+\frac{36}{125}\times1+\frac{54}{125}\times2+\frac{27}{125}\times3=\frac{225}{125}=\frac{9}{5}$$

よって，ルール①とルール③の期待値は同じであることがわかります。

今回は「より一般化された議論で書かれたものほど高得点で採点します。」という問題なので，ここまでの具体例で分析された答案でも点数をあげています。

より高得点を目指すため，より抽象化した議論をしてみましょう。

ここまでの議論から次の2つを説明すればいいという方針が立ちます。

【問題１】ルール①とルール②の確率が等しいことを説明する。

【問題２】ルール②とルール③の確率が等しいことを説明する。

【問題１】については「解答」のように文字でおいて数学的に説明してくれた答案には20点与えています。一方で，「【ルール②】で引いたくじはもとに戻さないため，1本ずつ引くが、限りなく早く引くと、それは同時に引いた場合と同じであるとみなせる」のように感覚的に説明してくれた人も多くいました。「解答」のように数学的ではありませんが，この解答も素敵な解答だと思います。（15点で採点しました）

難しいのは【問題２】です。「解答」のように文字で一般化はできますが，「等しいこと」を証明するのはなかなか難しかったようです。完璧に数学的に証明できた人はいなかったので，満点はいませんでした。ぜひ解答を見て，追って味わってみてください。

数学Ｂの二項分布を勉強した人は二項分布の期待値から【ルール③】の期待値を求めた人がいました。これはこれでいいのですが，問題なのは【ルール①】（【ルール②】）の期待値です。

$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$ から求めようとしてもなかなか難しいところがあります。$k=1$ のときの期待値が $\dfrac{n}{m}$ であるから k 倍して k 回の時は $\dfrac{nk}{m}$ とするのは正しいのですが，論理的に不安なところがあります。（というか，この問題はこの部分を解明してほしかった。）そのため，３つとも期待値は $\dfrac{nk}{m}$ になるのは求められているが，論理的に飛躍しすぎている答案には満点をあげることができませんでした。解答者が採点者に考えたことを伝える手段は答案の中だけです。採点者にわかりやすい答案にしたいですね。

実はこの問題は数学のいずみにある僕の書いたレポート「【確率】実は同じこと」から出題しました。数学のいずみには楽しい数学の話題がたくさんあります。ぜひ読んでみてください！

（札幌創成高等学校　外山　尚生）