

### 着眼点

(1)は最小数または最大数に着目すればよいことに気づくと簡単である。(2)は実際に書いてみると気づくかもしれない。(3)は定義に従って計算するだけである。(4)は(3)をヒントとして  $F$  の値の変化に気づくことができるかどうかがかぎになっている。

### 解答例

(1)  $a, b, c, d, e$  の最小数を考える。最小数となるものが2つ以上あるときはその中のいずれかを考える。

たとえば最小数が  $b$  とする。このとき、 $b = \frac{a+c}{2}$  であり、 $b$  が最小数であることから明らかに  $a=c=b$  である。この考察を  $a, c$  について行うことにより同様にして  $e=b=a, b=d=c$  となる。

したがって、5つの数  $a, b, c, d, e$  はすべて等しい。

(2) いま、これらの和がすべて奇数になると仮定する。このとき、

$$a+b+c+d=(\text{奇数})$$

$$b+c+d+e=(\text{奇数})$$

$$c+d+e+e=(\text{奇数})$$

$$d+e+a+b=(\text{奇数})$$

$$e+a+b+c=(\text{奇数})$$

である。これらを辺々加えると、左辺は  $4(a+b+c+d+e)$  となり、偶数である。一方、右辺は5個の奇数の和であるから、奇数である。これは矛盾。

よって、各頂点にふられた隣り合って並んでいる4数を加えるとき、これらの和の中で少なくとも1つは偶数である。

(3) いずれも定義に従って計算する。

$$\textcircled{1} \quad F=1 \cdot 2+2 \cdot 3+3 \cdot 4+4 \cdot 5+5 \cdot 1=45$$

$$\textcircled{2} \quad F=1 \cdot 3+3 \cdot 2+2 \cdot 4+4 \cdot 5+5 \cdot 1=42$$

$$\textcircled{3} \quad F=5 \cdot 3+3 \cdot 2+2 \cdot 4+4 \cdot 1+1 \cdot 5=38$$

(4) 隣り合って並んでいる4数  $p, q, r, s$  が条件を満たしているとする。

条件より  $(p-s)(q-r)>0$  である。

残りの頂点にふられた数を  $t$  とすると、操作前の  $F$  の値は

$$pq+qr+rs+st+tp$$

であるから、これを  $F_1$  とおく。

$q$  と  $r$  を入れ替える操作を行うと、操作後の  $F$  の値は

$$pr+rq+qs+st+tp$$

になるので、これを  $F_2$  とおく。

このとき

$$\begin{aligned} F_1-F_2 &= (pq+qr+rs+st+tp)-(pr+rq+qs+st+tp) \\ &= pq+rs-pr-qs \end{aligned}$$

$$=(p-s)(q-r)>0$$

である。つまり、 $F_1 > F_2$  であるからこの操作をおこなうと  $F$  の値は減少する。

もし、この操作が無限に続けられるとすると、 $F$  の値はどんどん減少するが、 $F$  の異なる値は高々異なる 5 数の円順列  $(5-1)! = 24$  (個) しかないから矛盾である。

よって、この操作は有限回で終了する。