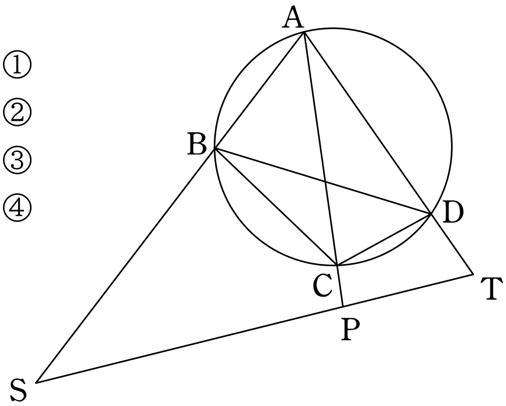
着眼点

本問では，数学Ⅰの三角比，数学Aの平面幾何の応用として登場する「トレミー（プトレマイオス）の定理（以降定理）」に焦点を当て，この定理を駆使したものを作問しました。なお，ベースは問題(4)で，どこぞの参考書に載っていたものです。本問は当初，定理を駆使するだけでしたが，定理自体を証明する問題を要請されたため，(1)(2)を作りました。ただ，定理の証明は，一部の人に知られている三角比の方法などでなく，あまり知られていない手法を用意し，公平性を保とうと考えました。

解答例

(1) △ASP と △ACB において



△ABD∽△ATS より　$\angle ADB = \angle ASP$　…①

弧 AB の円周角より　$\angle ADB = \angle ACB$　…②

①と②より　$\angle ASP = \angle ACB$　…③

また，　∠A は共通　…④

③と④より，2 組の角が等しいので

△ASP∽△ACB

よって　AS：AC＝SP：CB

ゆえに　$SP = \dfrac{AS \cdot BC}{AC}$

ここで，条件 △ABD∽△ATS（相似比 1：k）から $AS = k \cdot AD$ なので

$$SP = \frac{kAD \cdot BC}{AC}$$

(2) (1)より　$SP = \dfrac{kAD \cdot BC}{AC}$，同様にして　$TP = \dfrac{kAB \cdot CD}{AC}$

これらより　$ST = SP + TP = \dfrac{k(AD \cdot BC + AB \cdot CD)}{AC}$

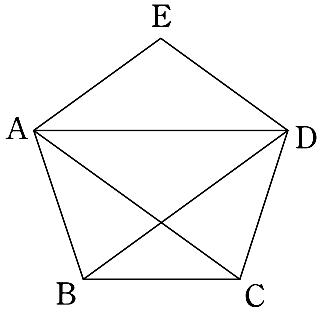
また，条件 △ABD∽△ATS（相似比 1：k）より，$ST = k \cdot BD$ なので

$$k \cdot BD = \frac{k(AD \cdot BC + AB \cdot CD)}{AC}$$

したがって　$BD = \dfrac{AD \cdot BC + AB \cdot CD}{AC}$

ゆえに　$AB \cdot CD + DA \cdot BC = AC \cdot BD$

(3) 正五角形 ABCDE で考える。



求める対角線の長さは 1 種類（x とする）しかない。

このとき，四角形 ABCD において，

トレミーの定理から　$AB \cdot CD + DA \cdot BC = AC \cdot BD$

ここで，$AB = BC = 1$ より

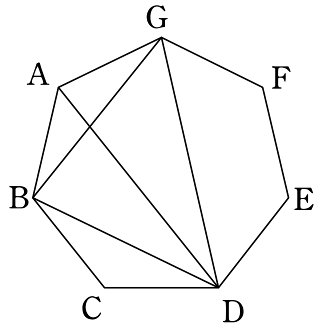
$$1 \cdot 1 + x \cdot 1 = x \cdot x$$

$$x^2 - x - 1 = 0$$

$$x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

$x>0$ より　$x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

(4)　正七角形 ABCDEFG で考える。



このとき，四角形 ABDG において，

トレミーの定理から　AB･DG＋GA･BD＝GB･AD

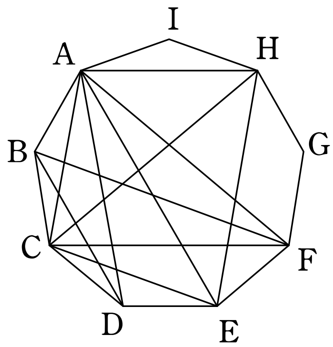
ここで，BD＝GB＝b，AD＝DG＝c とすると，

AB＝GA＝a より　$a\cdot c+a\cdot b=b\cdot c$

$abc\fallingdotseq 0$ より，両辺を abc で割って

$$\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a}$$

(5)　正九角形 ABCDEFGHI で考える。



求める対角線の長さは

AC($=a$)，AD($=b$)，AE($=c$)

の 3 種類である。

このとき，四角形ABCDにおいて，

トレミーの定理から　AB･CD＋DA･BC＝AC･BD

ここで，

AB＝CD＝BC＝1，AC＝BD＝a，AD＝b

より　$1\cdot1+1\cdot b=a^2$　　すなわち　$b=(a+1)(a-1)$　…①

また，四角形 ABCF において，

トレミーの定理から　AB･CF＋FA･BC＝AC･BF

ここで，

AB＝BC＝1，AC＝a，CF＝b，BF＝FA＝c

より　$1\cdot b+c\cdot 1=a\cdot c$　　すなわち　$b=c(a-1)$　…②

①，②と $a\fallingdotseq 1$ から　$c=a+1$　…③

さらに，四角形 ACEH において，

トレミーの定理から　AC･EH＋HA･CE＝AE･HC

ここで，

AC＝CE＝a，EH＝b，AE＝HC＝c

より　$a\cdot b+a\cdot a=c\cdot c$

①，③を代入すると　$a(a^2-1)+a^2=(a+1)^2$

整理すると　$a^3-3a-1=0$

$a>0$ より，条件から　$a=k$

したがって，　$b=k^2-1$，$c=k+1$

よって，求める 3 種類の長さは　k，k^2-1，$k+1$