$\boxed{\text{着眼点}}$

(1)，(2)は三角比を使う。

(3)　(ｉ)　$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ を用いて，θを消去する。

(ii)　$\cos 45^\circ$ と $\cos\theta$ の大小比較をする。

(iii)　(ｉ)で求めた式を利用する。

(iv)　$\alpha=\theta+90^\circ$ に気が付く。

$\boxed{\text{解答例}}$

(1)(ｉ)　P$(10,\ 9)$，Q$(5\sqrt{2},\ 5\sqrt{2})$　(ii)　P$(7,\ 3\sqrt{3})$，Q$\left(\dfrac{5}{2},\ \dfrac{5\sqrt{3}}{2}\right)$

(2)　P$(3(t+1)\cos\alpha,\ 3(t+1)\sin\alpha)$，Q$(5t\cos\theta,\ 5t\sin\theta)$

(3)(ｉ) 動点 P と動点 Q が一致するとき，(1)の結果より

$$3(t+1)\cos\alpha+10=5t\cos\theta \quad \cdots①$$
$$3(t+1)\sin\alpha=5t\sin\theta \quad \cdots②$$

を満たせばよい。

①と②の両辺を 2 乗して辺々を加えると

$$9(t+1)^2+60(t+1)\cos\alpha+100=25t^2$$

よって　$\cos\alpha=\dfrac{16t^2-18t-109}{60(t+1)}$ ………③

次に，$0^\circ\leqq\alpha\leqq180^\circ$ より $-1\leqq\cos\alpha\leqq1$ なので

$$-1\leqq\frac{16t^2-18t-109}{60(t+1)}\leqq1$$

$\dfrac{16t^2-18t-109}{60(t+1)}\geqq-1$ より，$60(t+1)>0$ であるから

$$16t^2+42t-49\geqq0$$
$$(8t-7)(2t+7)\geqq0$$
$$t\leqq-\frac{7}{2},\ \frac{7}{8}\leqq t$$

$t\geqq0$ なので，$t\geqq\dfrac{7}{8}$　…④

$\dfrac{16t^2-18t-109}{60(t+1)}\leqq1$ より，$60(t+1)>0$ であるから

$$16t^2-78t-169\leqq0$$
$$(8t+13)(2t-13)\leqq0$$
$$-\frac{13}{8}\leqq t\leqq\frac{13}{2}$$

$t\geqq0$ なので，$0\leqq t\leqq\dfrac{13}{2}$　…⑤

よって，④と⑤より　$\dfrac{7}{8}\leqq t\leqq\dfrac{13}{2}$　…⑥

(ii) $t=4$ は⑥を満たす

$t=4$ を③に代入すると　$\cos\alpha=\dfrac{1}{4}$

①に $t=4$，$\cos\alpha=\dfrac{1}{4}$ を代入すると　$\cos\theta=\dfrac{11}{16}$

ここで，$\cos 45^\circ-\cos\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{11}{16}=\dfrac{\sqrt{128}-\sqrt{121}}{16}>0$ であるから

$\cos 45^\circ>\cos\theta$

よって，$\theta>45^\circ$ である。（注：$\theta\fallingdotseq 47^\circ$ です。）

(iii) ③に $\alpha=60^\circ$ を代入すると　$16t^2-48t-139=0$

解の公式を用いて解くと　$t=\dfrac{6\pm5\sqrt{7}}{4}$

$t\geqq0$ より　$t=\dfrac{6+5\sqrt{7}}{4}$

$2<\sqrt{7}<3$ より $4<\dfrac{6+5\sqrt{7}}{4}<\dfrac{21}{4}$ であるから，$t=\dfrac{6+5\sqrt{7}}{4}$ は⑥を満たす。

参考までに，θ と 45° との大小関係を求めると次にようになる。

①に $t=\dfrac{6+5\sqrt{7}}{4}$，$\alpha=60^\circ$ を代入すると　$\cos\theta=\dfrac{-27+92\sqrt{7}}{278}$

ここで，$2.6^2=6.76<7$ より $\sqrt{7}>2.6$ であるから

$$\cos\theta=\frac{-27+92\sqrt{7}}{278}>\frac{-27+92\times2.6}{278}=0.763\cdots$$

また，$1.5^2=2.25>2$ より $\sqrt{2}<1.5$ であるから

$$\cos 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}<\frac{1.5}{2}=0.75$$

すなわち，$\cos\theta>\cos 45^\circ$

よって，$\theta<45^\circ$ である。（参考：$\theta\fallingdotseq 39^\circ$ です。）

(iv) $\mathrm{OQ}\perp\mathrm{OP}$ より $\alpha=\theta+90^\circ$ となるので，このとき

①は　$3(t+1)(-\sin\theta)+10=5t\cos\theta$　…⑦

②は　$3(t+1)\cos\theta=5t\sin\theta$　…⑧

⑦$\times\cos\theta+$⑧$\times\sin\theta$ より，$t=2\cos\theta$　すなわち　$\cos\theta=\dfrac{t}{2}$　…⑨

⑨を⑧に代入すると　$3(t+1)\cdot\dfrac{t}{2}=5t\sin\theta$

$t=0$ のとき，点 P と点 Q は一致しないので，$t\neq0$

$$\sin\theta=\frac{3}{10}(t+1)\quad\cdots⑩$$

⑨，⑩と $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ より　$\dfrac{t^2}{4}+\dfrac{9}{100}(t+1)^2=1$

$$34t^2+18t-91=0$$

$$t=\frac{-9\pm5\sqrt{127}}{34}$$

$t>0$ なので
$$t=\frac{-9+5\sqrt{127}}{34}$$

次に， $11<\sqrt{127}<12$ より， $\frac{46}{34}<\frac{-9+5\sqrt{127}}{34}<\frac{51}{34}$ だから⑥を満たす。

よって　$t=\frac{-9+5\sqrt{127}}{34}$