着眼点

1より大きい無理数の小数部分は1より小さい正の数となるが，この逆数は1より大きくなる。この一連の変換について，変換後の数の整数部分と元の整数部分が一致するか，また，変換後の数が元と，あるいは2回変換後の数が元と一致するかを探究してみました。

関数 d は，連分数展開に関係しており，2次係数 $b+\sqrt{N}$ の連分数展開は，循環することが知られており，本問で言うと，ある整数 m，n に対して

$$d^{(m+n)}(b+\sqrt{N})=d^{(m)}(b+\sqrt{N})$$

が成り立つことを意味しています。

解答例

(1) $\boxed{d(\sqrt{2})}$ $1=\sqrt{1}<\sqrt{2}<\sqrt{4}=2$ より $[\sqrt{2}]=1$ であるから

$$d(\sqrt{2})=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1$$

$\boxed{d^{(3)}(\sqrt{3}+1)}$ $1=\sqrt{1}<\sqrt{3}<\sqrt{4}=2$ より，$[\sqrt{3}+1]=2$ だから

$$d(\sqrt{3}+1)=\frac{1}{(\sqrt{3}+1)-2}=\frac{1}{\sqrt{3}-1}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

$$1=\frac{1+1}{2}<\frac{\sqrt{3}+1}{2}<\frac{2+1}{2}<\frac{3}{2}<2 \text{ より } \left[\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right]=1 \text{ だから}$$

$$d^{(2)}(\sqrt{3}+1)=\frac{1}{\frac{\sqrt{3}+1}{2}-1}=\frac{2}{\sqrt{3}-1}=\sqrt{3}+1$$

よって $d^{(3)}(\sqrt{3}+1)=\dfrac{1}{(\sqrt{3}+1)-2}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$

$\boxed{d^{(10)}(\sqrt{29})}$ $5=\sqrt{25}<\sqrt{29}<\sqrt{36}=6$ より $[\sqrt{29}]=5$ だから

$$d(\sqrt{29})=\frac{1}{\sqrt{29}-5}=\frac{\sqrt{29}+5}{4}$$

$$\frac{5}{2}<\frac{5+5}{4}<\frac{\sqrt{29}+5}{4}<\frac{6+5}{4}=\frac{11}{4} \text{ より } \left[\frac{\sqrt{29}+5}{4}\right]=2 \text{ だから}$$

$$d^{(2)}(\sqrt{29})=d\left(\frac{\sqrt{29}+5}{4}\right)=\frac{1}{\frac{\sqrt{29}+5}{4}-2}=\frac{4}{\sqrt{29}-3}=\frac{\sqrt{29}+3}{5}$$

$$\frac{8}{5}=\frac{5+3}{5}<\frac{\sqrt{29}+3}{5}<\frac{6+3}{5}=\frac{9}{5} \text{ より } \left[\frac{\sqrt{29}+3}{5}\right]=1 \text{ だから}$$

$$d^{(3)}(\sqrt{29})=d\left(\frac{\sqrt{29}+3}{5}\right)=\frac{1}{\frac{\sqrt{29}+3}{5}-1}=\frac{5}{\sqrt{29}-2}=\frac{\sqrt{29}+2}{5}$$

$$\frac{7}{5}=\frac{5+2}{5}<\frac{\sqrt{29}+2}{5}<\frac{6+2}{5}=\frac{8}{5} \text{ より } \left[\frac{\sqrt{29}+2}{5}\right]=1 \text{ だから}$$

$$d^{(4)}(\sqrt{29})=d\left(\frac{\sqrt{29}+2}{5}\right)=\frac{1}{\dfrac{\sqrt{29}+2}{5}-1}=\frac{5}{\sqrt{29}-3}=\frac{\sqrt{29}+3}{4}$$

$2=\dfrac{5+3}{4}<\dfrac{\sqrt{29}+3}{4}<\dfrac{6+3}{4}=\dfrac{9}{4}$ より $\left[\dfrac{\sqrt{29}+3}{4}\right]=2$ だから

$$d^{(5)}(\sqrt{29})=d\left(\frac{\sqrt{29}+3}{4}\right)=\frac{1}{\dfrac{\sqrt{29}+3}{4}-2}=\frac{4}{\sqrt{29}-5}=\sqrt{29}+5$$

$10=5+5<\sqrt{29}+5<6+5=11$ より $[\sqrt{29}+5]=10$ だから

$$d^{(6)}(\sqrt{29})=d(\sqrt{29}+5)=\frac{1}{(\sqrt{29}+5)-10}=\frac{1}{\sqrt{29}-5}=\frac{\sqrt{29}+5}{4}$$

以上より，$d^{(6)}(\sqrt{29})=d(\sqrt{29})$ が成り立つので

$$d^{(10)}(\sqrt{29})=d^{(4)}(d^{(6)}(\sqrt{29}))=d^{(4)}(d(\sqrt{29}))=d^{(5)}(\sqrt{29})=\sqrt{29}+5$$

(2)　$[\sqrt{N}]=a$ であり

$$d(\sqrt{N})=\frac{1}{\sqrt{N}-[\sqrt{N}]}=\frac{1}{\sqrt{a^2+1}-a}=\frac{\sqrt{a^2+1}+a}{(\sqrt{a^2+1}-a)(\sqrt{a^2+1}+a)}$$

$$=\frac{\sqrt{a^2+1}+a}{(a^2+1)-a^2}=\sqrt{a^2+1}+a>a+a=2a>a=[\sqrt{N}]$$

ゆえに，$\{d(\sqrt{N})\}>[\sqrt{N}]$ より $[d(\sqrt{N})]\fallingdotseq[\sqrt{N}]$ であるから，$b=0$，$N=a^2+1$ のときは性質Ｐを満たさない。

(3)　$[\sqrt{N}]=a$ であり

$$d(\sqrt{N})=\frac{1}{\sqrt{N}-[\sqrt{N}]}=\frac{1}{\sqrt{a^2+2}-a}=\frac{\sqrt{a^2+2}+a}{(\sqrt{a^2+2}-a)(\sqrt{a^2+2}+a)}$$

$$=\frac{\sqrt{a^2+2}+a}{(a^2+2)-a^2}=\frac{\sqrt{a^2+2}+a}{2}$$

ここで，$a<\sqrt{N}$ であるから $a<\dfrac{\sqrt{N}+[\sqrt{N}]}{2}$ となる。

また，$a^2+2<a^2+4a+4=(a+2)^2$ から $\sqrt{N}=\sqrt{a^2+2}<a+2$ が成り立つ。

よって，$\dfrac{\sqrt{a^2+2}+a}{2}<\dfrac{(a+2)+a}{2}=a+1$ から $\dfrac{\sqrt{N}+[\sqrt{N}]}{2}<a+1$ が成り立つ。

以上のことから　$a<\dfrac{\sqrt{a^2+2}+a}{2}<a+1$

よって，$[d(\sqrt{N})]=a=[\sqrt{N}]$ であるから，$b=0$，$N=a^2+2$ のときは性質Ｐを満たす。

(4)　$2<k<2a+1$ より $a^2<a^2+2<a^2+k<a^2+2a+1=(a+1)^2$

よって　$\sqrt{a^2}<\sqrt{a^2+k}<\sqrt{(a+1)^2}$

すなわち　$a<\sqrt{a^2+k}<a+1$

したがって，$[\sqrt{N}]=[\sqrt{a^2+k}]=a$ であることから

$$d(\sqrt{N})=\frac{1}{\sqrt{N}-[\sqrt{N}]}=\frac{1}{\sqrt{a^2+k}-a}=\frac{\sqrt{a^2+k}+a}{(\sqrt{a^2+k}-a)(\sqrt{a^2+k}+a)}$$

$$=\frac{\sqrt{a^2+k}+a}{(a^2+k)-a^2}=\frac{\sqrt{a^2+k}+a}{k}<\frac{a+1+a}{k}=\frac{2a+1}{k}$$

ここで，$k>2$ であり，a，k の関係から $a\fallingdotseq 1$ であり，$(k-2)a$ が自然数であるので，$(k-2)a>1$ すなわち $\frac{2a+1}{k}<a$ 。

以上より，この場合は性質Ｐを満たさない。

(5)　b は自然数より，$[b+\sqrt{N}]=b+[\sqrt{N}]=b+a>a$ であることから，

$$\frac{1}{(b+\sqrt{N})-[b+\sqrt{N}]}=\frac{1}{\sqrt{N}-[\sqrt{N}]}$$

となる。(2)から(4)より上の値が成り立つのは，(2)の $N=a^2+1$ のときのみである。

この場合は，(2)より

$$[d(\sqrt{N})]=[\sqrt{a^2+1}+a]=[\sqrt{a^2+1}]+a=2a$$

となるので，$2a=a+b$ すなわち $a=b$ となる。

(6)　定義より $d(b+\sqrt{N})=\frac{1}{\sqrt{N}-[\sqrt{N}]}$ なので，求める方程式は

$$(b+\sqrt{N})(\sqrt{N}-[\sqrt{N}])=1 \qquad \text{ゆえに} \quad (b-[\sqrt{N}])\sqrt{N}=1-N+b[\sqrt{N}]$$

ここで，$\sqrt{N}$ は無理数なので $b=[\sqrt{N}]$ かつ $N-b[\sqrt{N}]=1$ 。

ゆえに　$(N,\ b)=(a^2+1,\ a)$

《別解：何人かの生徒の解答》

条件を満たすときは，性質Ｐを満たすことが必要である。(5)より，性質Ｐを満たす自然数の組 $(N,\ b)$ は，$(a^2+2,\ 0)$，$(a^2+1,\ a)$ のときのみ。

ｉ）$(N,\ b)=(a^2+2,\ 0)$ の場合

$$d(b+\sqrt{N})=\frac{\sqrt{a^2+2}+2}{2}$$

であり，これより

$$\frac{\sqrt{a^2+2}+a}{2}=\sqrt{a^2+2} \qquad \text{すなわち} \quad a=\sqrt{a^2+2}$$

となり，左辺は有理数，右辺は無理数となるので，$(N,\ b)=(a^2+2,\ 0)$ は適さない。

ii）$(N,\ b)=(a^2+1,\ a)$ の場合

(5)より　$d(b+\sqrt{N})=\sqrt{a^2+1}+a$

となるので，$(N,\ b)=(a^2+1,\ a)$ は条件を満たす。

(7)　$N=a^2+k$ より

$$d^{(2)}(b+\sqrt{N})=d^{(2)}(\sqrt{N}-a)=d\left(\frac{1}{\sqrt{N}-a}\right)$$

$$=d\left(\frac{\sqrt{N}+a-mk}{k}\right)=\frac{k}{\sqrt{N}+a-mk}$$

ここで，$\left[\dfrac{\sqrt{N}+a}{k}\right]=m$ とおくと

$$d\left(\frac{\sqrt{N}+a}{k}\right)=d\left(\frac{\sqrt{N}+a}{k}-m\right)=d\left(\frac{\sqrt{N}+a-mk}{k}\right)$$

$$=\frac{k}{\sqrt{N}+a-mk}=\frac{k(\sqrt{N}-a+mk)}{N-(a-mk)^2}$$

$$=\frac{k(\sqrt{N}-a+mk)}{a^2+k-a^2+2mak-m^2k^2}=\frac{\sqrt{N}-a+mk}{1+2ma-m^2k}$$

よって，条件と $\sqrt{N}$ が無理数であることと $m \fallingdotseq 0$ より

$$1+2ma-m^2k=1 \qquad \text{すなわち} \qquad mk=2a$$

これから，k は $2a$ の約数である。

また，$b=-a+mk$ でもあるので，$b=-a+2a=a$ となる。

つまり，条件を満たすのは $b=a$ であり，k は $2a$ の約数となるときのみ。