$\boxed{\text{着眼点}}$

具体例で期待値を計算してみれば，すべてが等しいことはわかると思います。あとはそれをどうやって一般的に説明するかです。

$\boxed{\text{解答}}$

どの場合も期待値に違いはない。以下でこのことを証明する。

当たりくじ n 本を含む m 本 $(n<m)$ のくじから引くときを考える。

＜【ルール１】と【ルール２】が等しいことの証明＞

【ルール１】で i 本 $(n>i)$ の当たりくじを引く確率は

$$\frac{{}_n\mathrm{C}_i\times{}_{m-n}\mathrm{C}_{k-i}}{{}_m\mathrm{C}_k}=\frac{\dfrac{{}_n\mathrm{P}_i}{i\,!}\times\dfrac{{}_{m-n}\mathrm{P}_{k-i}}{(k-i)!}}{\dfrac{{}_m\mathrm{P}_k}{k\,!}}$$

$$=\frac{k\,!}{i\,!(k-i)!}\times\frac{{}_n\mathrm{P}_i\times{}_{m-n}\mathrm{P}_{k-i}}{{}_m\mathrm{P}_k}$$

$$={}_k\mathrm{C}_i\times\frac{{}_n\mathrm{P}_i\times{}_{m-n}\mathrm{P}_{k-i}}{{}_m\mathrm{P}_k}$$

【ルール２】で i 回当たりくじを引く確率は

$${}_k\mathrm{C}_i\times\frac{n}{m}\times\frac{n-1}{m-1}\times\frac{n-2}{m-2}\times\cdots\times\frac{n-i+1}{m-i+1}$$

$$\times\frac{m-n}{m-i}\times\frac{m-n-1}{m-i-1}\times\frac{m-n-2}{m-i-2}\times\cdots\times\frac{m-n-k+i+1}{m-k+1}$$

$$={}_k\mathrm{C}_i\times\frac{{}_n\mathrm{P}_i\times{}_{m-n}\mathrm{P}_{k-i}}{{}_m\mathrm{P}_k}$$

となり，確率は等しい。

したがって，【ルール１】と【ルール２】の期待値は等しい。

＜【ルール１】と【ルール３】が等しいことの証明＞

【ルール１】の期待値は

$$0\times\frac{{}_n\mathrm{C}_0\times{}_{m-n}\mathrm{C}_k}{{}_m\mathrm{C}_k}+1\times\frac{{}_n\mathrm{C}_1\times{}_{m-n}\mathrm{C}_{k-1}}{{}_m\mathrm{C}_k}+2\times\frac{{}_n\mathrm{C}_2\times{}_{m-n}\mathrm{C}_{k-2}}{{}_m\mathrm{C}_k}+\cdots+k\times\frac{{}_n\mathrm{C}_k\times{}_{m-n}\mathrm{C}_0}{{}_m\mathrm{C}_k}$$

$$=\frac{1}{{}_m\mathrm{C}_k}(0\times{}_n\mathrm{C}_0\times{}_{m-n}\mathrm{C}_k+1\times{}_n\mathrm{C}_1\times{}_{m-n}\mathrm{C}_{k-1}+\cdots+k\times{}_n\mathrm{C}_k\times{}_{m-n}\mathrm{C}_0)\quad\cdots①$$

【ルール３】の期待値は

$$0\times{}_k\mathrm{C}_0\times\left(\frac{n}{m}\right)^0\times\left(\frac{m-n}{m}\right)^k+1\times{}_k\mathrm{C}_1\times\left(\frac{n}{m}\right)^1\times\left(\frac{m-n}{m}\right)^{k-1}+\cdots$$

$$\cdots+2\times{}_k\mathrm{C}_2\times\left(\frac{n}{m}\right)^2\times\left(\frac{m-n}{m}\right)^{k-2}+\cdots+k\times{}_k\mathrm{C}_k\times\left(\frac{n}{m}\right)^k\times\left(\frac{m-n}{m}\right)^0$$

$$=\frac{1}{m^k}\{0\times n^0\times(m-n)^k+1\times{}_k\mathrm{C}_1\times n^1\times(m-n)^{k-1}+\cdots+k\times{}_k\mathrm{C}_k\times n^k\times(m-n)^0\}$$

$$\cdots②$$

ここで次の等式が成り立つ。

$$k\,{}_nC_k = n\,{}_{n-1}C_{k-1} \quad \cdots③$$

証明　${}_nC_k = \dfrac{n\,!}{k\,!(n-k)!} = \dfrac{n}{k} \times \dfrac{(n-1)!}{(k-1)!\{(n-1)-(k-1)\}!} = \dfrac{n}{k}\,{}_{n-1}C_{k-1}$

より　$k\,{}_nC_k = n\,{}_{n-1}C_{k-1}$

$${}_{n+m}C_r = {}_nC_0 \times {}_mC_{r-0} + {}_nC_1 \times {}_mC_{r-1} + {}_nC_2 \times {}_mC_{r-2} + \cdots + {}_nC_n \times {}_mC_0 \quad \cdots④$$

証明　$m+n$ 個のものから r 個を取り出すときを考える。

$m+n$ 個のものを m 個のグループ（グループ M）と n 個のグループ（グループ N）に分けて考えると，r 個取り出す場合は次の場合が考えられる。

(グループ M から取り出す個数，グループNから取り出す個数)

$=(0,\ r),\ (1,\ r-1),\ (2,\ r-2),\ \cdots,\ (r,\ 0)$

よって，④の等式がなりたつ。

$$(x+y)^n = {}_nC_0 x^n y^0 + {}_nC_1 x^{n-1} y^1 + {}_nC_2 x^{n-2} y^2 + \cdots + {}_nC_n x^0 y^n \quad \cdots⑤$$

証明　異なる x 個の赤玉と異なる y 個の白玉が入った袋から 1 個ずつ玉を取り出してもとに戻す操作を n 回行う。このとき，取り出される玉の場合の数は重複順列の考え方から $(x+y)^n$ 通りである。

一方で，この場合の数を赤玉を 0 回とる場合，赤玉を 1 回とる場合，…と考えると，場合の数は

${}_nC_0 x^n y^0 + {}_nC_1 x^{n-1} y^1 + {}_nC_2 x^{n-2} y^2 + \cdots + {}_nC_n x^0 y^n$ となる。

①式を変形すると

$$① = \frac{1}{{}_mC_k}(n\,{}_{n-1}C_0 \times {}_{m-n}C_{k-1} + n\,{}_{n-1}C_1 \times {}_{m-n}C_{k-2} + \cdots + n\,{}_{n-1}C_{k-1} \times {}_{m-n}C_0) \quad (\because ③)$$

$$= \frac{n}{{}_mC_k}({}_{n-1}C_0 \times {}_{m-n}C_{k-1} + {}_{n-1}C_1 \times {}_{m-n}c_{k-2} + \cdots + {}_{n-1}C_{k-1} \times {}_{m-n}C_0)$$

$$= \frac{n}{{}_mC_k} \times {}_{m-1}C_{k-1} \quad (\because ④\text{の } n=n-1,\ m=m-n \text{ のとき})$$

$$= \frac{n}{\dfrac{m\,!}{k\,!(m-k)!}} \times \frac{(m-1)!}{(k-1)!(m-k)!} = \frac{nk}{m}$$

②式を変形すると

$$② = \frac{1}{m^k}\{k\,{}_{k-1}C_0 n^1 (m-n)^{k-1} + k\,{}_{k-1}C_1 n^2 (m-2)^{k-2} + \cdots + k\,{}_{k-1}C_{k-1} n^k (m-n)^0\} \quad (\because ③)$$

$$= \frac{nk}{m^k}\{{}_{k-1}C_0 n^0 (m-n)^{k-1} + {}_{k-1}C_1 n^1 (m-n)^{k-2} + \cdots + {}_{k-1}C_{k-1} n^{k-1} (m-n)^0\}$$

$$=\frac{nk}{m^k}m^{k-1}$$ （∵⑤の $x=n$ ，　$y=m-n$ ，　$n=k-1$ のとき）

$$=\frac{nk}{m}$$

よって，【ルール①】の期待値と【ルール③】の期待値は等しい。